DELLA CURVA CASSINIANA

E

DI UNA NUOVA PROPRIETA' MECCANICA

Della quale essa è dotata

TRATTATO SINTETICO

DEL SIGNOR

GIO. FRANCESCO MALFATTI

Pubblico Professore di Matematica
nella Università di Ferrara.

Utilis . . . .
Si das, hoc parvis quoque rebus magna juvari. HOR. Lib. II. Ep. I.

IN PAVIA.

Nella Stamperìa del R., ed I. Monastero di S. Salvatore.
CON PERMISSIONE.

ALL' ILLUSTRISSIMO E REVERENDISSIMO

MONSIGNORE

ALFONSO BONFIOLI

NATO MALVEZZI

PRELATO DOMESTICO DI S. S.

SOCIO DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,

DELL' INSTITUTO DI BOLOGNA

E

CORRISPONDENTE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI PARIGI.

GIO. FRANCESCO MALFATTI

EGlì è gran tempo Nobilissimo e Chiarissimo MONSIGNORE, ch' io stava pure aspettando un' occasione di darvi una testimonianza pubblica del mio rispetto verso di Voi, e dell' altissima stima, che ho avuto delle cospicue qualità della Vostra mente e del Vostro cuore sin da quando l' uniformità de' nostri studj intrapresi sotto la direzione del sommo Geometra il P. VINCENZO RICCATI, mi aperse l' adito alla Vo-

ſtra conoscenza, e mi ottenne da Voi quella bontà ed amicizia della quale mi avete sempre onorato. Ma nel mentre io andava in traccia d'un incontro tanto da me deſiderato, mi son veduto gentilmente sorpreso da Voi con una ſignificazione manifeſtiſſima della memoria che di me cortesemente serbate nella dottiſſima diſſertazione epiſtolare a me diretta, che leggeſte in un'adunanza di codeſta celebre Accademia dell' Inſtituto per occaſione di un opuscolo del Ch. Sig. Abate Andres in difesa dell' immortal Galileo. Certamente nel prevenire la corteſia Voſtra con un atto ſimile di dovuto uffizio, mi sarei compiacciuto della mia diligenza; nell' eſſer però da Voi prevenuto mi compiaccio della mia fortuna: e giacchè debbo eſſer secondo, Vi prego di accogliere se non come adeguato ricambio almen come pegno della ſincera mia gratitudine il presente mio Opuscoletto sulla Elliſſe Caſſiniana. Dee queſto, se non per altro, eſſervi caro pel nome, che a Voi, Bolognese, ricorda del gran Domenico Cassini, ornamento e splendor

per

per più anni della Vostra rinomatissima Università, da cui se staccollo il gran Luigi xiv. col chiamarlo presso di se a Parigi, egli era forse allora il sol Principe, che avesse diritto di rapirvelo e di posseder ne' suoi Stati un uomo sì raro. A Voi è nota la celebrità di questa curva, che il suo Autore voleva fin porre in Cielo, e sostituire alle Ellissi Kepleriane, tratto forse a ciò fare, siccome congettura l'incomparabile Sig. d' Alembert, da un Teorema di cui si serviva Set Wardo nel caso d' un' Ellisse poco eccentrica per trovare prossimamente l' anomalia vera d' un Pianeta, e dal suppor, che Keplero stabilisse il Sole in un de' fuochi dell' Ellisse, collocando nell' altro il centro de' movimenti medj. Ma il Cassini, malgrado la sua somma sagacità, trasferiva ad una curva di diversissima indole quella proprietà, che compete unicamente all' Ellisse Apolloniana, ed alterava notabilmente la vera ipotesi dell' Astronomo di Wirtemberg. Non corrispondevano inoltre alle osservazioni i risultati della sua nuova trajettoria, che verso il 90.°, e

il 270.° grado di diſtanza dall' apogeo ci avrebbe dato il Sole troppo più vicino di quello che ſia effettivamente. Sicchè per queſte ed altre ragioni la Caſſiniana non potè più colassù soſtenerſi e le convenne tornar giù baſſo a metterſi in riga delle curve di pura curioſità, rinunziando per sempre all' onore, a cui pretendeva d' innalzarla il Caſſini. Mancate ad eſſa le incombenze aſtronomiche, non è peró rimaſta sfornita di pregi geometrici. Molte e belle sono le proprietà di queſt' ultimo genere, che la rendono assai commendabile: e le principali sono ſtate analiticamente determinate dall' Ab. de Gua ne' suoi Uſi dell' Analiſi Carteſiana, e dal Gregory nella sua Aſtronomia Fiſica e in altre opere ancora. Ma sebbene queſta curva ſia ſtata attentamente esaminata dal suo inventore, e da altri illuſtri Matematici, non so, che di alcuna sua proprietà meccanica ſia mai ſtata fatta menzione. Ora è a me riuscito di trovarne una, che è semplice e curiosa; ed eccovela in poche parole. E' noto a tutti i Geometri, che la Caſſi-

niana

niana secondo le diverse ipotesi della grandezza del rettangolo costante e della distanza de' suoi fuochi, cangia notabilmente di figura, perchè in un caso somiglia all' Ellisse conica rivolgendosi da ogni banda concava verso il suo asse; in un altro diventa in parte concava e in parte convessa: poi passa a rappresentare colla sua figura un 8 di ciffra aritmetica: e finalmente si divide in due ovali conjugate, che possono degenerare ancora in due punti conjugati: Ora nel caso, in cui rassomiglia a un 8, se verrà collocata in modo, che risulti in direzion verticale la tangente eccitata dal punto, il qual serve di diafragma alle due ovali, e suppongasi da quel punto medesimo cadere un grave giù pel concavo della curva, il tempo speso dal grave nello scorrere qualunque arco è eguale esattamente al tempo, che impiegherebbe lo stesso o altro grave nel discendere per la corda corrispondente. Questa nuova specie di sincronismo, o d' isocronismo, che il vogliam dire, nobilita sempre più la curva del Cassini, e

mi sembra degna di essere presentata ai Geometri, presso de' quali son sempre preziose le proprietà meccaniche delle curve. Se poi mi domandate la ragione, perchè potendo con non molto calcolo porvi sotto degli occhi questa bella proprietà della Cassiniana, abbia nondimeno preferito il metodo sintetico all' analitico, conducendo il Lettore al vero per una strada alquanto più lunga e poco battuta a dì nostri, io ve la rendo immediatamente. Voi sapete, che molti Geometri invaghiti del comodo e della fecondità dell' Analisi, e disgustati della difficoltà, che porta seco un edifizio di dimostrazioni sintetiche, vorrebbero escluder quasi affatto la Sintesi dai libri matematici, insinuando incessantemente, che col servirsi della prima, si va in traccia del vero per quella strada che all' uomo è più naturale e più facile, ove s' incontrano gli esempj più perfetti della maniera, con cui si dee impiegar l' arte del raziocinio, e in cui lo spirito assistito dalla presenza, e dal maneggio di pochi simboli inventati per esprimere le idee, ac-

quista

quiſta una idoneità maravigliosa allo scoprimento di cose incognite, che altrimenti rimarrebbero, fuori della sua sfera. In verità chi ſi argomentaſſe di negare il vantaggio sommo, che han le forze dell' Analiſi sopra quelle della Sinteſi, autenticato da tanti sublimi ritrovamenti, che eſſa ha prodotto specialmente pel corso del paſſato, e del presente secolo nella Fiſica, nella Nautica, nell' Aſtronomia, nella Meccanica, e nella Geometria ſteſſa, ai quali la sola Sinteſi non avrebbe potuto aspirare, moſtrando di non veder la luce sul bel meriggio, ſi avrebbe ragion di credere, che voleſſe per avventura consolarſi della propria cecità ed ignoranza per via di clamori vani, i quali sarebbero ricevuti con compaſſione o con riso dai Matematici. Io ripeterei di un tal uomo ciò che dice Cicerone di Epicuro a propoſito de' suoi errori nella Fiſica: *Quod profecto non putaviſſet, ſi Geometriam... discere maluiſſet*, e il conforterei a diventare miglior Geometra prima di decidere ciò che ſia più o men utile all' avvanzamento del-

la Geometria. Si confessi dunque volentieri, che la provincia, sulla quale domina siccome Reina l' Analisi, è molto più estesa e più vasta di quella che appartiene alla Sintesi; ma non s' inferisca da tal preminenza, che l'altra debbasi abbandonare, l' altra tanto benemerita e per tanti secoli della Geometria antica, che serve anche oggidì all' Algebra medesima di util compagna massimamente per le preparazioni de' Problemi, e negli elementi d' EUCLIDE è stata ed è il fondamento e la base di tutta la Matematica. Giova pur moltissime volte a dimostrare una verità con un' estrema eleganza, ed arriva a sciogliere non pochi Problemi con brevità e nitidezza, laddove facendo uso dell' Algebra converrebbe ingolfarsi in lunghi e nojosi calcoli prima di arrivare a conoscere il valore di un' incognita, il quale bene spesso si presenta sotto un' ispida forma di frazioni e di termini vincolati da segni radicali, che guidano il Geometra ad una intralciatissima costruzione. Ed anche quando conduce per una serie di proposizioni prima che si enunzj e si di-

dimostri il Teorema finale, io vi trovo pure il suo buono; e rassomiglio queste proposizioni precedenti a quelle comode e gioconde stazioni, nelle quali tratto tratto si riposa un viaggiatore, che vuol pur giungere al luogo che si è prefisso, ma nello stesso tempo vuol pigliar lena ed osservar senza fretta tutto il bello che incontra per via. L' Analista al contrario, ove si tratti d' indagini non molto sublimi, è presso a poco un viaggiatore che si chiude in un carrozzino, e lasciandosi guidar diritto dal meccanismo de' suoi calcoli senza quasi trovarsi obbligato ad alcuna attenzione, non ismonta, se non quando è arrivato al termine del suo viaggio. Questi arriva alcune ore prima dell' altro, se la meta è comune, ma certamente ha veduto meno. Checchè ne sia, a me sembra incostrastabile, che le dimostrazioni della Sintesi essendo ordinariamente più difficili di quelle dell' Analisi, siano atte ad esercitar sempre più lo spirito, accostumandolo ad una maggiore applicazione, e a fargli contrarre un abito di pazienza e di ostinazione,

senza

senza le quali avvien di rado che si scoprano di grandi cose. Quindi è ch' io raccomando ai miei Uditori di tenere una sentenza media tra quelli che vorrebbero che si dimostrasse ogni cosa per Sintesi, e gli altri che schifano tutto ciò che non è specie algebraica; e soglio ricordar loro, che il più grande Analista della sua età, l' inventore del metodo delle flussioni, in una parola il gran Newton doleasi soventi volte col Pemberton di non aver posto maggiore studio nella lettura degli antichi Geometri, e disapprovava altamente, che la Sintesi restasse a' suoi dì trascurata. Ma ritorniam finalmente alla nostra curva. Essendo di quarto grado, siccome Vi è noto, l' equazione che le compete, parea difficile ad alcuno de' miei Scolari, che si potesse trattare la Cassiniana alla maniera d' Euclide. Io ho voluto farne la pruova nell' ozio d' una villeggiatura, e Voi giudicherete se vi sia riuscito. Le dimostrazioni stese dovean servire per soddisfare alla curiosità di giovani semplicemente iniziati nelle Matematiche. Il

per-

perchè non vi dovete corrucciar meco, se Vi sembrano alcuna volta troppo minute; e terrete per fermo, che io non aveva in pensiero di trarle mai dall' oscurità, alla quale erano destinate. Finalmente il caso mi fece scoprire in questa curva la proprietà meccanica della quale sopra ho parlato; e posto che ne aveva già trattato sinteticamente la parte geometrica, non ho creduto opportuno di cangiar metodo nell' esposizione della parte meccanica, la quale mi ha poi determinato di dar l' una e l' altra alla luce, offerendo l' opuscolo a Voi per attestarvi in quel modo, che mi è possibile, la venerazione e la stima, che Vi professo. Possa esso non essere del tutto indegno della cortese Vostra approvazione, e mi vaglia almeno a meritarmi da Voi la continuazione della Vostra benevolenza e l' onore de' Vostri comandamenti.

Ferrara 2. Aprile 1781.

Del gusto degli antichi Geometri, e delle lor forme di dimostrazione il Signor Cavaliere ISACCO NEWTON *si professò sempre un grande ammiratore; io l' ò udito ancora a condannar se stesso, per non seguirli ben più rigorosamente di quel che faceva; e parlar con rincrescimento del suo inganno al principio de' suoi studj Matematici nell' applicarsi alle opere di* DES CARTES, *ed altri Scrittori Algebraici, prima di aver considerati gli elementi di* EUCLIDE *con quell' attenzione che merita un così eccellente Scrittore.*

PEMBERTON. Saggio della Filosofia Newtoniana. Pref.

DELLA CURVA CASSINIANA

E

DI UNA NUOVA PROPRIETA' MECCANICA

Della quale essa è dotata

TRATTATO SINTETICO.

PARTE I.

Delle proprietà Geometriche della curva Caſſiniana.

Proposizione I.

Dati i due punti fiſſi, o fuochi F, f, delineare una curva per modo, che condotte ad un qualunque punto Q della curva le rette fQ, fQ, ſia il rettangolo fatto da queſte rette eguale a un quadrato dato (Fig. 1.).

Col raggio *CF* che ſia la metà di *Ff* ſi deſcriva il cerchio *FNf*, e pongaſi il raggio *CN* perpendicolare ſul diametro *Ff*: tirata poſcia la corda *FN*, in eſſa, ſe occorre, prodotta ſi prenda *FB* eguale al lato del dato quadrato, e da *B* ſi cali *BA* perpendicolare ſopra *Ff*: finalmente col centro in *A* ſia deſcritto un altro cerchio *FBD* di raggio *AB*. Se dal punto *F* ſarà condotta per qualunque punto *E* del quadrante di queſto ſecondo cerchio la ſecante *FEe*, che tagli

il ſemidiametro AB prodotto in e: indi coi centri in F, f, e coi raggi FE, Fe reſpettivamente ſi deſcriveranno archi circolari, che s' interſechino in Q: dico che queſto punto apparterrà alla ricercata curva.

Dim.^{e} Per proprietà del cerchio il rettangolo EFe è eguale al quadrato di FB. Ma $FQ=FE$, $fQ=Fe$. Dunque anche il rettangolo $fQ \cdot FQ$ ſarà eguale al dato quadrato di FB, e però il punto Q è nella curva, che dal nome del ſuo inventore ſi chiama la curva Caſſiniana.

Scolio 1. I due archi deſcritti coi raggi FE; Fe hanno un' altra interſezione, per eſempio, in q; ſicchè queſto punto pure appartiene alla curva: e ſiccome, congiunta la Qq, queſta è una corda comune ai due archi tagliata dalla Ff che uniſce i loro centri, così riſulta, che verrà eſſa tagliata perpendicolarmente e per metà in P. La qual coſa verificandoſi riſpetto agli altri punti di curva ſimilmente determinati, vuol dire, che la Caſſiniana dall' una parte e dall' altra dell' aſſe CF aurà due rami ſimili ed eguali.

Scolio 2. Quelle operazioni che ſi ſono eſeguite relativamente al punto F, potevano medeſi-

ma-

mamente adattarsi all' altro punto f; ed altri due rami simili ed eguali ai primi sarebbero risultati dall' altra parte Cf dell' asse. Dunque la curva intera è composta di quattro rami simili ed eguali tra loro di qua e di la dal centro C.

Scolio 3. Rimanendo costante la distanza de' fuochi F, f, a misura che varia il lato FB del dato quadrato, si indurranno alcune mutazioni nella curva, le quali saranno notabili, se dall' essere FB maggiore di FN passerà ad essere minore di FN ma maggiore di FC, poi uguale a FC, e finalmente minore. Di tutti questi cangiamenti di curva noi parleremo diffusamente in appresso.

Prop. II.

Se da qualunque punto Q della Cassiniana si condurranno ai fuochi le rette QF, Qf e nel raggio CN prodotto se fa d' uopo, si prenderà CL che sia terza proporzionale dopo il diametro Ff e il dato lato FB; indi fatto l' angolo FQn eguale all' angolo FfQ si adatterà da Q sino all' asse la retta $Qm = Qn$: dico che la CL sarà media proporzionale tra fm, e Fn. (Fig. 2.)

Dim.^e Per ragione che ſi è fatto l' angolo $FQn =$ ang. FfQ, i triangoli FQf, FQn ſaranno ſimili, e per conſeguenza $Ff : FQ :: FQ : Fn$, onde $FQ^2 = Ff . Fn$. Perchè poi i complementi fmQ, FnQ degli angoli alla baſe del triang. iſoſcele mQn ſono eguali, ſarà anche ang. $fmQ =$ ang. fQF, e quindi ſimili i triang. FQf, fmQ, avremo $Ff : fQ :: fQ : fm$, cioè $fQ^2 = Ff . fm$. Ora eſſendo per coſtruzione $Ff : FB :: FB : CL$; e per proprietà della curva $FB : fQ :: FQ : FB$, ſarà per la ragion perturbata $Ff : fQ :: FQ : CL$, ovvero alternando $Ff : FQ :: fQ : CL$. Ma $Ff : fQ :: fQ : fm$; e $Ff : FQ :: FQ : Fn$. Dunque colla ſoſtituzione delle ragioni eguali $fQ : fm :: FQ : CL$, e di più $FQ : Fn :: fQ : CL$, e colla compoſizione delle ragioni $fQ . FQ : fm \times Fn :: fQ . FQ : CL^2$, ove a motivo degli antecedenti eguali ſi vede eſſere $fm . Fn = CL^2$, vale a dire CL media proporzionale tra fm, e Fn. Sarebbe ſimile la dimoſtrazione, ſe l' angolo QFf foſſe ottuſo coſicchè la perpendicolare QP cadeſſe fuori del triangolo fFQ.

Corol. Il lato mQ, ovvero Qn del triangolo iſoſcele mQn ſarà eguale a CL. Perchè i

trian-

triangoli fQm, FQn, ciaſcun de' quali è ſimile al triangolo fQF, ſon pur ſimili tra loro. Dunque varrà l' analogia $fm : mQ :: Qn : nF :: mQ : nF$; e però mQ è media proporzionale tra fm, e Fn, cioè per la preſente propoſizione $mQ=CL$.

Prop. III.

Poſta la precedente coſtruzione della fig. 2. ove è QP all' aſſe perpendicolare, ſi conduca la retta PL: ſarà la Fn eguale alla differenza delle rette PL, CP; e la fm eguale alla ſomma delle medeſime rette.

Si prenda $fp=FP$, ſarà ancora $Cp=CP$, onde avremo $fP=FP+2CP$. Perchè poi $mP=Pn$, ſe da fP leveremo mP, e dall' aggregato $FP+2CP$ la Pn, reſterà pure $fm=Fn+2CP$, onde il rettangolo $fm \cdot Fn$, cioè per la precedente $CL^2=Fn^2+2CP\times Fn$. Aggiungaſi da una parte e dall' altra il quadrato CP^2, e avremo CL^2+CP^2, ovvero $PL^2=Fn^2+2CP.Fn+CP^2$, e quindi per Euclide $PL=Fn+CP$, ovvero $Fn=PL-CP$: che è la 1.ª parte della propoſizione. Si è ſopra trovato $fm=Fn+2CP$. Soſtituita pertanto in vece di Fn

 la

la differenza $PL-CP$, risulterà $fm=PL+CP$; che è la 2.ª parte.

Corol. 1. Ove sia PL minore del raggio CF, sarà $mP=CF-PL$: e $mP=PL-CF$, ove sia PL maggiore. Per il primo caso veggasi la fig. 2., in cui per la presente prop. $fm+Fn=2PL$, e aggiungendo mn cioè il doppio di mP; $Ff=2PL+2mP$, ovvero prendendo le metà; $CF=PL+mP$, onde risulta $mP=CF-PL$. Per il 2.º caso può servire la fig. 1.ª alla quale adattata la costruzione della fig. 2.ª si trova $fm=PL+CP$; $Fn=PL-CP$. Dalla retta fm, e dalle linee ad essa eguali levisi la mP, e resterà $fP=PL+CP-mP$. Così pure dalla Fn si detragga la nP, e la eguale mP dalla differenza $PL-CP$, onde resti $FP=PL-CP-mP$. Si uniscano ora in somma fP, FP, e avremo $Ff=2PL-2mP$, cioè prendendo le metà; $CF=PL-mP$, che dà $mP=PL-CF$.

Corol. 2. La fQ maggiore delle due rette, che si partono dai fuochi, e vanno alla curva, sarà media proporzionale tra il diam.º Ff e la somma delle due rette PL, CP; e la minore FQ sarà media tra il diam.º Ff, e la differenza delle medesime rette. Imperciocchè per la costruzione

è

è $fQ^2 = Ff . fm$; $FQ^2 = Ff . Fn$, cioè $fQ^2 = Ff \times (PL + CP)$; $FQ^2 = Ff (PL - CP)$. Dunque ec.

Prop. IV.

Ad una data ascissa CP ritrovare la corrispondente ordinata PQ, che sia all' ascissa perpendicolare. (Fig. 3. 4. 5. 6. 7.)

Si conduca pel punto L determinato, come sopra, una parallela al diam.° Ff, in cui alla data ascissa CP si prenda eguale la LO, e si congiunga CO, la quale tagli nel punto M il cerchio MF, producendola, se fa d'uopo. Presa poi nell'asse la retta Pm eguale all' intercetta MO, ed eretta da P una perpendicolare sull'asse, si adatti a questa dal punto m la mQ eguale a CL: sarà PQ la ricercata ordinata.

Dim.e Pel Corol. della prop. 2.ª, e pel Corol. 1. della 3.ª l'ordinata PQ debb'essere lato di un triang.° rettang.° che abbia per ipotenusa una retta eguale a CL, e per secondo lato una retta che sia eguale a $PL - CF$ come nelle fig. 3. 4., ovvero a $CF - PL$ come nelle fig. 5. 6. 7. Ma si è posto $Pm = MO$, che nelle fig. 3. 4. è $= CO - CM$

=

$= PL-CF$ per ragione che le rette PL, CO ſon parallele ed eguali, e nelle fig. rimanenti diventa $MO=CF-PL$: e di più ſi è preſa in tutte $mQ=CL$. Dunque realmente il punto Q è in curva, e l'ordinata PQ è quella che corriſponde all' aſſunta aſciſſa CP.

Scolio. Quì hanno luogo le determinazioni che corriſpondono alle diverſe ipoteſi, le quali ſi poſſon fare nella proporzione che ha il dato lato FB alla diſtanza de' fuochi. O è FB maggiore della corda del quadrante come nella fig. 3. o ad eſſa è eguale come nella fig. 4., o è minore come nelle fig. 5. 6. 7. A ciaſcuna di queſte ipoteſi corriſponde una diverſa grandezza di CL, ove invariata rimanga la diſtanza de' fuochi.

Se $FB > FN$, ſarà $CL > CN$, e il punto L cadrà al di ſopra di N (Fig. 3.). Perchè eſſendo CF terza proporzionale dopo Ff, e FN, la terza proporzionale dopo Ff e una maggiore di FN cioè FB ſarà maggiore di CF ovvero di CN. Ma CL è appunto queſta terza proporzionale. Dunque $CL > CN$. Se $FB=FN$, il punto L cadrà in N, e $CL=CN$ (Fig. 4.) perchè CF oſſia CN è in tal caſo la terza proporzionale dopo fF, e FB ovvero FN.

Se nello ſteſſo tempo $FB < FN$ e $> CF$, ſarà $CL < CN$ e $> \frac{CN}{2}$ (Fig. 5.). Perchè ſuppoſta $FB = CF$, ſarebbe CL la terza proporzionale dopo fF e CF. Ma CF è la metà di fF. Dunque CL ſarebbe la metà di CF ovvero di CN. Laonde ſe ſi pone $FB > CF$, ſarà $CL > \frac{CN}{2}$.

Se $FB = CF$, ſarà dunque $CL = \frac{CN}{2}$, oſſia $CL = LN$ (Fig. 6.).

Finalmente ſe $FB < CF$, dalle coſe ſopradette ſi deduce eſſere $CL < \frac{CN}{2}$.

Prop. V.

Determinare le maſſime, e le minime ordinate, e i punti, ne' quali la curva taglia l' aſſe.

Eſſendo per ogni punto Q della curva l'ipotenuſa mQ del triang. mPQ ſempre una quantità coſtante, ed eſſendo il quadrato di PQ eguale alla differenza de' quadrati di mQ, e di mP, ſi fa evidente, che PQ ſarà la minima quando mP oſſia MO ſarà la maſſima; e al contrario PQ ſarà la maſſima, ove mP ovvero MO ſia la minima. Nella fig. 3. di tutte le intercette MO la minima è NL, la quale corriſponde all'aſciſſa nulla.

la. Dunque l' ordinata appartenente al punto C farà la massima di tutte le ordinate. Per determinarne poi la grandezza, piglieremo al solito $Cn=LN$; indi da n adatteremo a CL la retta $nH=CL$: il punto H sarà il più sublime della curva e CH la massima ordinata.

Pel caso della fig. 4. L cade in N, onde LN è nulla, e quindi anche il punto più alto H coincide in N ovvero nell' estremità del raggio CN.

Nell' ipotesi della fig. 5., poichè L cade al di sotto di N, la LE parallela all' asse taglierà necessariamente il cerchio in qualche punto I, e di tutte le intercette MO tra i punti N, I la massima è NL, la minima è in I, ove la intercetta diventa zero. Dunque la ordinata CH, che corrisponde al punto C sarà la minima di tutte quelle, che si determinano coi raggi tirati tra i punti N, I; e la massima ordinata sarà quella che vien determinata col mezzo del raggio CI. Il perchè condotta fino all' asse la Lg parallela a CI, verremo a determinare l' ascissa Cg, alla quale spetta la massima ordinata gG, che, per essere l' intercetta in I nulla, sarà eguale a CL, ed avrà la sua estremità G nel punto in cui sega il cerchio

la

la ILG. Fisseremo poi la CH col prendere $Cn=NL$, ed adattare la $nH=CL$.

Nella fig. 6. abbiamo $NL=CL$. Se pertanto prenderemo $Cn=NL$ e da n adatteremo a CL la $nH=CL=NL$, egli è evidente che il punto H cadrà nel centro C, e la CH si farà nulla. Quanto poi alla massima ordinata Gg, si determinerà questa all' istessa maniera che si è praticata pel caso della fig. 5.

Resta l' ultimo caso della fig. 7., in cui $CL < NL$. Se al solito si prende $Cn=NL$, non sarà possibile dal punto n adattare alla CN una retta eguale a CL, perchè Cn è maggiore di CL, e un cerchio descritto col centro in n e col raggio CL non può arrivare a segare o a toccare la retta CL. Dunque nella CN prodotta se si vuole o superiormente o inferiormente non avrem punto appartenente alla curva. Anzi nemmen per un certo tratto d' ascissa vi sarà ordinata alcuna che termini alla curva; e ciò sarà finchè l' intercetta MO resta maggiore di CL, siccome è chiaro. Cominceremo dunque ad aver curva quando quest' intercetta diventi eguale a CL : ed avremo facilmente questo primo punto H, se da L adatteremo

mo all' asse la $LH = LN$. Perchè menata CSR parallela a LH, che tagli la IL in S, e il cerchio in R, abbiamo $CS = LH = LN$. Dunque sarà la intercetta $RS = CL$, e però il punto H nell' asse sarà il primo punto della Cassiniana. La massima ordinata poi Gg si determinerà come sopra.

Nelle fig. 3. 4. quanto più si scosta il punto O dal punto L tanto più crescono le intercette MO, cosicchè supposta arrivata la CO nella situazione CE in guisa che la intercetta DE sia eguale a CL, se si tira la LV parallela a CE, sarà zero l'ordinata che corrisponde all' ascissa CV. Per determinare poi questa ascissa CV ossia il semiasse della curva, basterà adattare dal punto L all' asse la retta LV eguale a $CL + CN$, perchè allora dalla sua parallela ed eguale CE detratto CN ovvero CD, resta appunto l'intercetta $DE = CL$. Per le fig. 5. 6. 7. vale lo stesso discorso se consideriamo le linee COM diriggersi al di sotto di CI. Quì pure le intercette andran sempre crescendo fino alla $DE = CL$, che serve a determinare il punto V, il quale noi troveremo siccome abbiam fatto nelle figure precedenti.

Colla CDE resta terminato l'intero ramo della Cas-

Caſſiniana HQV, perchè qualunque retta tirata al di ſotto di CDE laſcia un' intercetta maggiore di DE ovvero di CL; il che rende impoſſibile la determinazione di alcun altro punto di curva. Simili operazioni poi praticate nella produzione della parallela EOL alla deſtra di L ſerviranno a determinare l'altro ramo di curva Hu ſimile ed eguale al primo; e col porre inferiormente alle aſciſſe CP le ordinate corriſpondenti eguali a PQ, reſterà delineata l'intera curva.

Corol. 1. Condotta la FH, queſta ſarà eguale al dato lato FB (Fig. 2.). La qual coſa ſi vede chiaramente col tirare la Hf. Il rettangolo $Hf . FH = FB^2$. Ma per la ragione che la perpendicolare HC divide per metà la baſe Ff del triangolo fHF, è $Hf = HF$. Dunque $HF^2 = FB^2$, e però $HF = FB$. Si potrà quindi determinare in altro modo il punto H della curva, deſcrivendo un arco col centro F e col raggio FB. Dove queſt' arco ſegherà la CN, ivi avremo il punto H. Nella fig. 7 però queſto metodo non avrà luogo, perchè, eſſendo $FB < FC$, l'arco deſcritto col raggio FB non potrà mai giungere a tagliare la NC.

Corol. 2. Sottendaſi nella fig. 2. la corda Nf,

e

e si ecciti da B fino all'asse la BK a Nf parallela; la retta HV che unisce il punto H con uno de' vertici della curva, sarà eguale a FK. Poichè è $FN=Nf$, sarà ancora $FB=BK$, e l' angolo FBK retto. Dunque $FK^2=2FB^2$. Perchè poi la fF è tagliata per mezzo in C, e ad essa resta aggiunta la FV, sarà per le dottrine Euclidiane $fV.FV + CF^2 = CV^2$, ovvero, essendo per proprietà della curva $fV.VF=FB^2$, avremo $FB^2+CF^2= CV^2$, cioè $FB^2=CV^2-CF^2$. Ma FH^2 ossia $FB^2= CH^2+CF^2$. Dunque aggiungendo queste quantità eguali, risulterà $2FB^2=CV^2+CH^2$, ovvero $FK^2=HV^2$, cioè $HV=FK$.

Corol. 3. Nella fig. 7. non ha luogo l' anzidetta eguaglianza, perchè nella CN non è determinabile alcun punto di curva. Anzi, laddove nelle altre figure la somma de' quadrati CV^2, CH^2 è eguale a $2FB^2$, ovvero a FK^2, nella fig. 7. la somma de' suddetti quadrati eguaglierà $2CF^2$, ovvero FN^2. Imperciocchè, per la nota proprietà della Cassiniana, $fH.HF=FB^2$. Ma per Euclide $fH.HF + CH^2 = CF^2$. Dunque $FB^2+CH^2=CF^2$. Nell' antecedente Corollario abbiam veduto essere $FB^2=CV^2-CF^2$. Onde $CV^2-CF^2+CH^2=CF^2$;

ed

ed aggiunto il quadrato CF^2, risulterà $CV^2 + CH^2 = 2CF^2 = FN^2$.

Corol. 4. La differenza poi de' medesimi quadrati CV^2, CH^2 nella fig. 7. è eguale a $2FB^2$, ovvero a FK^2, mentre che nelle altre figure la differenza de' suddetti quadrati è eguale a $2CF^2$ ossia a FN^2. Perchè pel Corol. 3., $FB^2 + CH^2 = CF^2$; $FB^2 = CV^2 - CF^2$. Dunque fatta la somma; $2FB^2 + CH^2 = CV^2$; e quindi $CV^2 - CH^2 = 2FB^2 = FK^2$. Per le altre figure poi abbiamo dal Corol. 2.; $FB^2 = CH^2 + CF^2$; $FB^2 + CF^2 = CV^2$. Onde detratti i primi dai secondi; $CF^2 = CV^2 - CH^2 - CF^2$; e aggiunto CF^2; $CV^2 - CH^2 = 2CF^2 = FN^2$.

Corol. 5. Il rettangolo però $HV \cdot Hu$ in tutti i casi della Cassiniana sarà eguale al quadrato di FK. Nella fig. 7. essendo Vu divisa egualmente in C, e disugualmente in H, sarà $uH \cdot HV + CH^2 = CV^2$, cioè $uH \cdot HV = CV^2 - CH^2$. Ma il Corol. 4. ci somministra $CV^2 - CH^2 = FK^2$. Dunque $uH \cdot HV = FK^2$. Per le altre figure poi serve la 2.ª, in cui tirata Hu, perchè $Cu = CV$, sarà anche $Hu = HV$, e il rettangolo $uH \cdot HV = HV^2 = FK^2$ pel Corol. 2.

Scolio 1. Dal Corol. 4. abbiamo, pel caso della fig. 7., $CV^2 - CH^2 = FK^2$, e per gli altri casi

$CV^2 - CH^2 = FN^2$. Dunque generalmente $CH < CV$: ed eccettuata la fig. 4., ove $CL = CH$, la costruzione delle altre figure prescritta nella prop. 4. fa vedere che debb' esser sempre $CL > CH$. Facciasi ora l'ipotesi che CH cresca fino a divenire infinita, rimanendo però finita la CF, si fa evidente, che nella suddetta equazione, $CV^2 - CH^2 = FN^2$, diventa FN minore di qualunque data, ossia nulla rispetto alla CH. Dunque in tal caso $CV^2 = CH^2$, cioè $CV = CH$. Presa pertanto qualunque ascissa CP anche infinita, e all' estremo punto Q della corrispondente ordinata PQ condotta la CQ, diventerà questa pure infinita, essendo in genere qualunque $CQ > CH$. La qual cosa io dimostro così.

Coll' ispezion sola della fig. 7. presentasi questa verità, perchè $CQ > CP$, e molto più $CQ > CH$. Per le fig. 5. 6. basta riflettere che nella 6.ª CH è nulla, e nella 5.ª, che CH è la minima delle ordinate dentro i punti H, G, e che CQ è maggiore di PQ, e in conseguenza molto maggiore di CH. Quanto poi alle fig. 3. 4., egli è certo per la prop. 4. essere $PQ^2 = CL^2 - MO^2$. Onde aggiunto CP^2 avremo $PQ^2 + CP^2$ ovvero $CQ^2 = CP^2 + CL^2 - MO^2$. Ma $CP^2 + CL^2 = PL^2 = CO^2$. Dunque

que $CQ^2 = CO^2 - MO^2 = (CO - MO)(CO + MO) = CM(CO + MO)$. In oltre per la presente $CH^2 = CL^2 - NL^2 = (CL - NL)(CL + NL) = CM \times (CL + NL)$. Sarà quindi $CQ^2 : CH^2 :: CO + MO : CL + NL$. Ma nelle fig. 3. 4. è sempre $CO > CL$; $MO > NL$, e però $CO + MO > CL + NL$. Dunque $CQ^2 > CH^2$, ovvero $CQ > CH$. Raccoglieremo da ciò, che se CH è infinita, molto più CQ sarà infinita. Condotte ora a Q dai fuochi le rette fQ, FQ, sarà per Euclide $fQ^2 = Cf^2 + CQ^2 + 2fC \cdot CP$. Ma poichè CQ è infinita, non solo Cf^2 è nullo rispetto a CQ^2, ma ancora il rettangolo infinito $2fC \cdot CP$, perchè questo è infinito di primo ordine, qualora l' ascissa CP sia infinita di prim' ordine, e CQ^2 diventa infinito di secondo. Dunque avremo $fQ^2 = CQ^2$, cioè $fQ = CQ$. All' istessa maniera proveremo essere anche $FQ = CQ$, e perciò sarà il rettangolo $fQ \cdot FQ = CQ^2$, ovvero $FB^2 = CQ^2$, cioè $CQ = FB$. Laonde quando il lato FB del dato quadrato è infinito, la Cassiniana si cangia in un cerchio, che ha il centro in C, e il raggio eguale a FB di grandezza infinita.

Scolio 2. In un' altra ipotesi ancora la curva diventa un cerchio, ed è, quando rimanendo fi-

nito il dato lato FB, ſi annulli la diſtanza de' fuochi F, f col coincidere tutti e due nel centro C. Egli è in tal caſo evidente, che il rettangolo $fQ . FQ$ ovvero il quadrato di FB ſi fa eguale al quadrato di CQ: la qual proprietà è del cerchio avente il centro in C e il raggio $= FB$.

Scolio 3. Ne' due ſcolj precedenti abbiamo conſiderato i due Caſi di CL infinitamente maggiore di CN. Ora conſidereremo altri due caſi di CL infinitamente minore di CN. Il 1.° è, quando rimanendo finita la CL, ſia infinito il raggio CN, ovvero infinita la diſtanza de' fuochi : il 2.°, quando reſtando finito il raggio CN, oſſia finita la diſtanza de' fuochi, ſi annulli la CL cadendo in C il punto L : ed ognun vede, che ambidue queſti caſi ſono compreſi unicamente nell' ipoteſi della fig. 7. Ora, ſiccome per coſtruzione è $CL : FB :: FB : Ff$, ſupponendoſi nel primo di queſti caſi CL finita, e CF ovvero Ff infinita, la media proporzionale FB tra CL, Ff ſarà bensì infinita ma però infinitamente minore di CF, e quindi ancora infinitamente minore di CV che è ſempre maggiore di CF. Dunque FB^2 e $2FB^2$ ſaranno infinitamente minori di CV^2. Ma pel Corol. 4. ſi

ha

ha $2FB^2 + CH^2 = CV^2$, ovvero perchè $2FB^2$ è nulla riſpetto a CV^2; $CH^2 = CV^2$ da cui ſi trae $CH = CV$. Dunque ſi annulla la retta HV; e poichè pel corol. 3. $FB^2 + CH^2 = CF^2$, ovvero traſcurando FB^2 nullo riſpetto a CH^2; $CH^2 = CF^2$, cioè $CH = CF$, inferiremo, che i punti H, V cadranno nel fuoco F, ove reſterà concentrata la parte di curva $HGVH$, ſiccome l' altra parte $H'IVH'$ ſarà tutta concentrata nell' altro fuoco f. Onde qualora il dato lato FB ſia infinito, e infinita d' un ordine maggiore la diſtanza de' fuochi, la Caſſiniana ſi riſolve ne' due punti F, f infinitamente lontani dal centro C.

Scolio 4. Rimane da ultimo l' altro caſo; che eſſendo finita la diſtanza de' fuochi, ovvero finito il raggio CF, ſia nulla la CL. In tal caſo debb' eſſere nullo eziandio il lato FB, onde, poichè $2FB^2 + CH^2 = CV^2$, e $FB^2 + CH^2 = CF^2$, ſvanendo la FB, ſarà $CH^2 = CV^2$, e $CH^2 = CF^2$, cioè sì CV che CH eguale a CF. Diventa perciò nulla la retta HV; e la curva $HGVH$ ſi raccoglie tutta nel fuoco F, ſiccome $H'IVH'$ nel fuoco f. Qualora dunque ſia finita la diſtanza de' fuochi, e L cada in C, la Caſſiniana ſi riſolve

 ne'

nè soli due punti o fuochi F, f.

Prop. VI.

La retta CO *serva a determinare la ordinata* PQ *corrispondente all'ascissa* CP = LO *cosicchè sia* PZ = MO, ZQ = CL; *e la retta* CA *serva a determinare un' altra ordinata* pq *cosicchè sia* Cp = LA; pz = BA; zq = CL. *Poi col centro* C *e col raggio* CO *si descriva un arco di cerchio* OR *che seghi la* CA *in* R *e faccia essere* AR *la differenza tra le due rette* CA, CO. *Se si compie il rettangolo* QPpt *e da* z *si tira alla* Qt *prodotta se fa di mestieri, la* zu *parallela a* ZQ; *dico che sarà* ut = AR (Fig. 8. 9.).

Per costruzione è $PZ = MO$; $pz = BA$. Dunque (Fig. 8.) $pz - PZ = BA - MO = AR$; e (Fig. 9.) $PZ - pz = MO - BA = AR$. Ma $PZ = Zz + zP$; $pz = Pp + zP$. Dunque per ragione della comune zP, la differenza tra le due pz, PZ sarà la stessa che la differenza tra le due Zz, Pp; e quindi nella fig. 8. sarà $Pp - Zz = AR$; e nella fig. 9. $Zz - Pp = AR$. Perchè poi $Pp = Qt$; $Zz = Qu$ e la differenza di queste rette è tu, sarà $AR = tu$.

Corol.

Corol. Quindi dedurremo, che tirata un' altra retta CD, per cui resti determinata una terza ordinata KS col porre $Kk = DE$; $KS = CL$, e compiuti sì il rettangolo $pqik$ che il parallelogrammo $zqgK$; sarà $gi = DT$, differenza tra le rette CD, CA.

Prop. VII.

Rimanendo la costruzione della proposizione precedente e presa qualunque ascissa CP *finita, supponiamo* Pp *infinitamente piccola: dico che sarà* AR : qt : : PQ : MO. (Fig. 8. 9.).

La zq tagli la Qt, se fa duopo, prodotta in r. Poichè Qz è un parallelogrammo, sarà $ZQ = zu$. Ma per proprietà della curva, è anche $zq = ZQ$ perchè ciascuna d'esse è eguale a CL. Dunque $zu = zq$. In oltre supponendosi $Pp = AO$ infinitamente piccola, sarà CA infinitamente prossima a CO, onde la loro differenza AR, ovvero ut sarà infinitesima. Si conduca la uq. Questa pure è infinitesima, perchè ipotenusa del triangolo rettangolo utq, in cui ut è infinitesima, e lo è pure tq differenza tra le due ordinate infinitamen-

te vicine PQ, pq : onde l' angolo uzq ſarà infiniteſimo anch' eſſo. Per la qual coſa, eſſendo eguali le rette zu, zq, ſarà uzq un triangolo iſoſcele che ha l' angolo al vertice z infinitamente piccolo; e quindi l' angolo zqu, ovvero uqr non differiſce da un retto. Ciò poſto, ſaranno ſimili i triangoli uqt, tqr. Ma tqr è ſimile a qzp. Dunque uqt ſimile a qzp ; e però varrà l' analogia $ut : tq :: pq : zp$, ovvero, perchè pq non differiſce da PQ e zp da $ZP = MO$, avendoſi pure per la 6.ª $ut = AR$, ſarà $AR : qt :: PQ : MO$.

Prop. VIII.

Rimanendo la preparazione della prop. 6.ª e ſuppoſta Pp *infinitamente piccola*, *ſarà* AR : Pp :: CP : CO. (Fig. 8. 9.)

L' angolo COL eſterno riſpetto al triangolo ACO è eguale alla ſomma de' due angoli OAC, OCA. Ma per eſſere $AO = Pp$ infiniteſima, l' angolo ACO è infiniteſimo. Dunque l' angolo LOC non differiſce dall' angolo OAR che d' un angolo infiniteſimo. Il perchè ſi potranno conſiderare come eguali gli angoli LOC, OAR; ed eſſendo pu-

re

re infinitamente piccolo l' archetto RO, potrà esso prendersi per una retta. Onde i triangoli OAR, LOC aventi di più gli angoli in R, L retti, saranno simili tra loro, e somministreranno la seguente proporzione $AR : AO :: LO : CO$, ovvero perchè $AO = Pp$; $LO = CP$; $AR : Pp :: CP : CO$.

Corol. Il rettangolo dell' ascissa e della sua differenza al rettangolo dell' ordinata e della sua differenza starà come $CO : MO$. Imperocchè dall' analogia della presente prop. si ricava $CP . Pp = AR . CO$, e dall' analogia della 7.ª $PQ . qt = AR . MO$. Dunque $CP . Pp : PQ . Qt :: AR . CO : AR . MO :: CO : MO$.

Prop. IX.

Da qualunque punto Q della curva intendasi eccitata ad essa la normale QS, che tagli l' asse nel punto S: significando poi le altre linee quel medesimo che nelle proposizioni precedenti, sarà la sottonormale $PS : CP :: MO : CO$ (Tav. II.) (Fig. 1. 2. 3. 4. 5.).

Supposta Pp infinitamente piccola di prim' or-

di-

dine, sarà dello stess' ordine infinitamente piccolo l'arco di curva Qq, e si potrà considerare come una linea retta, cui sia normale QS. Ora, poichè l'angolo SQq è retto, e retto pure l'angolo PQt, detratto il comune PQq, sarà l'angolo SQP eguale all'angolo qQt. Dunque i triangoli SPQ, qtQ, che di più hanno gli angoli retti in t e in P, saranno simili; e perciò avremo $SP : PQ :: qt : tQ = Pp$. Ma per la prop. 7.ª; $PQ : MO :: AR : qt$. Dunque per la ragion perturbata; $SP : MO :: AR : Pp$. In oltre, per la prop. 8.ª, $AR : Pp :: CP : CO$. Avrem quindi $SP : MO :: CP : CO$, ed alternando $SP : CP :: MO : CO$.

Corol. 1. Sarà perciò facile per un dato punto Q nella curva determinare la sunnormale SP. Si cali da Q sull' asse la perpendicolare QP, e nella LA parallela a CP si prenda $LO = CP$, e si meni la OC, la quale, se occorre, prodotta seghi il cerchio fNF in M. Poi si congiunga la OP, cui da M si tiri la parallela MS, che incontri l' asse nel punto S; sarà SP la sunnormale ricercata, perchè, attese le parallele SM, OP si fa appunto $SP : CP :: MO : CO$.

Corol.

Corol. 2. Trovata la sunnormale non sarà niente più difficile il determinare la suttangente, e la tangente della curva pel punto Q. Perchè, essendo SP la sunnormale, condotta la SQ, questa sarà normale alla curva, onde a SQ adattata fino all'asse, e a squadra la QT, la retta PT è la suttangente, e QT la tangente, che corrispondono al punto Q.

Scolio 1. Resta che si applichi la proposizione ad alcuni punti principali della Cassiniana nelle diverse modificazioni che essa assume. Supponiamo prima di *tutto* l'ascissa nulla e veggiamo nelle fig. 1. 2. 3. qual sunnormale corrisponde al punto H. In questa ipotesi CO diventa CL e MO diventa NL. Dunque, per la presente proposizione, $CL : NL$ come $CP = o$ alla sunnormale; e siccome CL, NL sono quantità finite, la sunnormale pel punto H sarà nulla, e la normale coinciderà sull' ordinata CH e sarà ad essa eguale. Avremo perciò la tangente HK parallela all'asse; e l' angolo fatto dalla prima ordinata e dalla curva sarà retto. Perchè poi ne' casi delle fig. 1. 2. l'ordinata CH è la massima di tutte, concluderemo, essere al principio la curva concava all'asse.

Ma

Ma nel caſo della fig. 3.ª eſſendo CH la minima delle ordinate compreſe dentro i punti H, G, ſi renderà chiaro, che la Caſſiniana della fig. 3.ª al principio è conveſſa all' aſſe.

Scolio 2. Sia la CDZ quella linea che ſerve a determinare il vertice V. Applicata l' analogia della propoſizione a queſto punto, ſarà CZ : DZ : : CV alla ſunnormale. Dal che ricaveremo, che queſta ſunnormale nel punto V è finita. Fatta dipoi la rifleſſione che ove la ſottangente PT ſia infinitamente piccola riſpetto a PQ, comunque PQ ſia o finita o infiniteſima, la tagente QT ſi può conſiderare come coincidente ſull' ordinata QP, poichè generalmente ſta $SP : PQ :: PQ : PT$, eſſendo finita la SP che corriſponde al punto V, e infinitamente piccola l' ordinata PQ nello ſteſſo punto V, ſarà la ſottangente PT in V infinitamente più piccola di PQ, onde ivi la tangente coinciderà ſull' ordinata, vale a dire diverrà normale all' aſſe. E valendo queſto diſcorſo per tutti i cangiamenti della Caſſiniana, concluderemo che in tutte le cinque figure la curva taglierà l' aſſe in V ad angolo retto, ove anche volgerà il ſuo concavo all' aſſe medeſimo, perchè CV è la maſſima di tutte le aſciſſe.

Sco-

Scolio 3. Dall'analogia $SP : CP :: MO : CO$ ſi deduce, che fuori del caſo dell' aſciſſa $CP = o$, non potrà più la ſunnormale SP divenir zero, ſe non ſi annulla la MO, perche CO non può creſcere fino all' infinito. Ora queſto è impoſſibile nelle fig. 1. 2. ſiccome è chiaro. Dunque in eſſe fuori del caſo già notato che appartiene al punto H della curva, non avrem più ordinata che ſia ad eſſa normale. Non ſarà però così nelle rimanenti fig. 3. 4. 5., perchè in eſſe la LA tagliando il cerchio fNF nel punto I, ſe condotto il raggio CI, ſupporremo che CO paſſi ad eſſer CI, ſvanirà l' intercetta MO. Dunque ancora in queſto caſo la ſunnormale ſvaniſce e l' ordinata corriſpondente ſi fa normale alla curva. Ma ivi l' ordinata è la maſſima Gg che abbiamo determinato nella prop. 5. Dunque queſta maſſima ordinata Gg è normale alla curva.

Scolio 4. Quando $CL = LN$, il primo punto H della curva cade in C, e quivi ora cercherem l' angolo, che fa la curva coll' aſſe. Supponiamo, che CP, PQ ſiano infinitamente piccole, e che ſia QS la normale, QT la tangente in Q (Fig. 4.). Avremo per la proprietà nota $CO : OM :: CP : PS$,

ovve-

ovvero, perchè essendo CO ossia OL infinitamente piccola, CO non differisce da CL e MO da NL; $CL : NL :: CP : PS$. Ma $CL = NL$. Dunque $CP = PS$. Di più, perchè TQ è tangente, e l'archetto CQ può assumersi come una retta, l'angolo retto TQS non è diverso dall'angolo CQS, il cerchio che si descrivesse col diametro CS passerebbe per Q, e P ne sarebbe il centro: onde risulta $PQ = CP$, e per conseguenza l'angolo PCQ eguale a un semiretto. Sicchè, quando si assume l'ipotesi del lato del quadrato dato eguale al raggio del cerchio CF, ovvero equivalentemente, quando $CL = NL$, la curva taglia l'asse nel centro C ad angolo semiretto.

Scolio 5. Rimane a vedersi quale angolo nella fig. 5.ª faccia la curva coll'asse nell'altra sua intersezione col medesimo asse al punto H. Quì pure supporremo HP, PQ infinitamente piccole e QS normale alla curva in Q. Dalla consueta analogia $CO : OM :: CP = CH : PS$, poichè CO, OM, CH sono quantità finite, deduciamo essere ancora la sunnormale PS finita. Oltracciò si ha $SP : PQ :: PQ : PT$, ove, essendo SP finita, PQ infinitamente piccola, si fa evidente, che

PT

PT è una quantità anche infinitamente minore di PQ. Dunque la tangente QT, e quindi l'archetto minimo HQ coincide sull' ordinata PQ e la curva taglia l'asse in H ad angolo retto.

Scolio 6. Abbiamo osservato nello Scolio 1. che la curva della fi. 3.ª verso H è convessa, e nello Scolio 2. che verso V è concava all' asse. Dunque tra H ed V vi sarà un punto in cui la curva di convessa si fa concava, il qual punto chiamasi il punto di flesso. Sia ora la curva QZN (Tav. II.) (Fig. 6.) la quale da Q partendosi convessa all' asse CM, dopo alcun tratto diventi concava; e il punto Z sia il limite comune di questa convessità e concavità, cioè sia il punto del flesso. Prendo prima l'ascissa finita CP, e segnate due consecutive quantità infinitamente piccole ed eguali tra loro che siano Pp, pk, innalzo alla parte convessa della curva tre ordinate infinitamente prossime PQ, pq, ks. Compiuti poscia i rettangoli $PQtp$, $pqik$, tiro la corda Qq e la produco finchè tagli la ks in o. Per la ragione che la curva Qqs è convessa, è certo, che il punto o cadrà al di sotto del punto s, e che, essendo $qi = Qt$, i triangoli Qqt, qoi saranno simili ed

egua-

eguali, onde avremo $oi = qt$. Dal che si raccoglie, essere la retta so la differenza tra is e qt. Ma qt è la differenza delle due ordinate pq, PQ; is la differenza dell' altre due ks, pq. Dunque so sarà la differenza seconda dell' ordinata PQ. Prendo poi l' ascissa CM ed alzo l' ordinata MN cui siano infinitamente prossime altre due ordinate mn, fg distanti dalla prima per eguali ed infinitamente piccoli intervalli Mm, mf, e terminate dalla parte concava Ng della curva. Rifatte le operazioni che abbiamo eseguito alla parte convessa e prodotta la corda Nn, resterà chiaro, che il concorso della Nn coll' ordinata fg si farà in un punto h superiore al punto g della curva, e che sarà hg la differenza seconda dell' ordinata MN. Avvi però questa diversità tra quel che avviene nel convesso e quel che avviene nel concavo della curva, cioè che nel convesso il punto o di concorso della corda Qq prodotta colla terza ordinata ks cade sotto al punto di curva s; e nel concavo il punto h di concorso della corda Nn prolungata colla terza ordinata fg cade al di sopra del punto di curva g. Dunque nel limite della convessità e della concavità questo tal punto di

con-

concorſo non può cadere nè ſopra nè ſotto il punto della curva; e però in queſto limite cioè in *Z* il punto *o* e il punto *Z* coincidono ſe ſi conſidera *Z* come limite della parte conveſſa; e coincidono *h*, e *Z* ſe ſi conſidera *Z* come limite della parte concava. Dunque nel punto del fleſſo la ſeconda differenza *so*, ovvero *hg* di un' ordinata ſvaniſce, e *is* diventa eguale a *qt*; e *gl* eguale a *nd*. Queſto criterio ſomminiſtratoci dalla Geometria degl' infinitamente piccoli ci ſarà utile per determinare il punto di fleſſo nella noſtra curva, ovvero le ordinate *CR*, *RZ*.

Prop. X

Suppoſta finita l' aſciſſa Cp = OL, *ſiano* Pp, pk *due differenze eguali e infiniteſime di prim' ordine; e le tre ordinate* PQ, pq, kS *vengano al ſolito determinate dalle tre rette* CM, CB, CE *che incontrino in* O, A, D *la retta* LI *coſicche* AO, AD *ſiano eguali a* Pp, pk, *e in conſeguenza eguali tra loro; e in oltre ſia* PZ = MO; pz = BA; DE = Kk. *Tirate poi le rette* ZQ, zq, KS, *ciaſcuna delle quali s' uguaglia a* CL, *ſi compia il parallelogram-*

mo ZQuz, *e la retta* Qu *tagli la* pq *in* t; *indi ſi chiuda l' altro parallelogrammo* zqgK; *e la retta* qg *tagli la* KS *in* i; *e ſi congiunga la retta* Sg. *Oltracciò coi raggi* CO, CA *ſi deſcrivano gli archetti* ORG, AT, *il primo de' quali ſega la* CB *in* R, *l' altro la* CD *in* T, *onde ſia* AR *la differenza, per cui cala* MO, *quando paſſa ad eſſere* AB; *e* DT *la differenza, per cui cala* BA, *quando paſſa ad eſſere* ED. *Finalmente ſi prenda* VT = AR, *onde ſia* DV = DT - AR, *ovvero la differenza ſeconda, per cui reſta diminuita la* MO. *Dico, che ove* S *ſia il punto del fleſſo ſarà* $MO . DV = AR^2 + qt^2$ (Fig. 7.) (Tav. II.).

Facciaſi centro in *K* e col raggio *KS* = *CL* ſi deſcriva l' arco di cerchio *hSgm* terminato dal punto *h*, che è l' eſtremo del raggio *Kh* che ſi alza perpendicolare ſull' aſſe, e dal punto *m*, che è il punto di concorſo dell' arco colla *Qt* prodotta, la quale ſega la *Sk* in *l*. Perchè *KS*, *Kg* ſono eguali, è evidente che queſt' arco paſſerà ancora per *g*. Ora da *g* ſi cali ſulla *Qm* la perpendicolare *gn*, e la corda *Sg* ſi prolunghi fino al concorſo in *r* colla prodotta *Qm*, e ſi ſegni il punto *d*, in cui la retta *qg* taglia la *KS*, e il

punto

punto e, in cui la Qm taglia il raggio hK. Effendo qt la differenza tra le ordinate qp, QP, ed iS la differenza tra le ordinate kS, pq, ove fia S il punto di fleffo, per lo fcol. 6. prop. 9., farà nulla la differenza feconda di PQ, offia nulla la differenza tra Si, e qt. Onde avremo $Si = qt = il = gn$. E perchè le rette zq, Kg fono parallele ed eguali, fe col raggio zq fi defcrive l' archetto qu, per l' eguaglianza degli angoli zqt, Kgn, e de' loro complementi tqu, ngm, i triangoli rettangoli qtu, gnm, che hanno i lati eguali qt, gn, faran tra loro fimili ed eguali, onde $tu = nm$, cioè, per la prop. 6., $AR = nm$. In oltre ne' triangoli Sig, gnr fimili, perchè $Si = gn$, farà $Sg = gr$, e $ig = nr$, cioè, pel corol. della prop. 6., $DT = nr$; e però $nr - nm = mr = DT - AR$, offia $mr = DV$. Dalla proprietà poi del cerchio ricaveremo $Sr . rg = (2em + rm) rm$, onde nafce l' analogia; $2Sg : 2em + rm :: rm : Sg$. Ma rm è infinitamente piccola, perchè tale è la $nr = ig = DT$; ed em è finita, perchè maggiore di $el = Kk = DE$. Dunque, trafcurata la rm nel primo confeguente della fuddetta analogia, avremo; $2Sg : 2em$, offia $Sg : em :: rm : Sg$. Si offervi, che la em è compo-

 fta

sta di el, ln, nm; ed è la prima parte $el = Kk = DE$; la seconda $ln = ig = DT$, la terza $nm = tu = AR = TG$; e quindi tutta la $em = ED + DT + TG = EG = MO$; sicchè $Sg : MO :: rm = DV : Sg$; e invertendo : $MO : Sg :: Sg : DV$, ove, poichè MO è finita, Sg infinitamente piccola di prim' ordine, si vede, che DV debbe risultare infinitamente piccola di second' ordine; e sarà $DV . MO = Sg^2$. Ma $Sg^2 = Si^2 + ig^2 = qt^2 + DT^2$, ovvero, perchè DT non differisce da VT, ossia da AR, per essere la quantità DV infinitesima rispetto ad AR; $Sg^2 = qt^2 + AR^2$. Dunque $MO . DV = AR^2 + qt^2$

Prop. XI.

Non variando alcuna cosa nella eguaglianza, e nell' infinita piccolezza delle differenze Pp, pk, *ovvero* OA, AD, *sarà* $CO . DV = Pp^2 - AR^2$. (Tav. II. fig. 7.)

Perchè $CG = CO$, e per proprietà del cerchio, varrà l' analogia; $2CO + DG : 2OL + DO :: DO : DG$. Parimente, perchè $CR = CO$; $2CO + AR : 2OL + AO :: AO : AR :: DO : VG$, essendo DO, VG respettivamente doppie di AO, AR.

AR. Dunque facendo i rettangoli degli estremi e de' medj nell'una e nell'altra proporzione, nascerà $2CO.DG + DG^2 = 2OL.DO + DO^2$; $2CO \times VG + AR.VG$, ovvero $2CO.VG + 2AR^2 = 2OL.DO + DO.AO$. E facendo la sottrazione di questi rettangoli dai precedenti, resterà $2CO.DV + DG^2 - 2AR^2 = DA.DO = 2AO^2$. Ma poichè $2CO$ è quantità finita, e DV infinitesima di second' ordine, il rettangolo $2CO.DV$ è pure un infinitesimo di second' ordine, e non può avere altro confronto che con quantità infinitesime dello stess' ordine, quali sono appunto DG^2, AR^2, AO^2. Verrà quindi, che il quadrato DG^2 si potrà assumere come eguale al quadrato di VG, o al quadrato di $2AR$, non essendo il quadrato di DG diverso dal quadrato VG che per quantità infinitesime d'un ordine superiore al secondo. Sostituito pertanto VG^2, ossia $4AR^2$ in vece di DG^2, avremo $2CO.DV + 2AR^2 = 2AO^2$, cioè $CO.DV + AR^2 = AO^2 = Pp^2$. Onde detratto il quadrato AR^2, rimane $CO.DV = Pp^2 - AR^2$.

PROP. XII.

Prodotto l'arco NE *fino al concorſo colla* LA *in* I, *nel punto del fleſſo* S *ſarà il triplo rettangolo delle parti del raggio* CD, DE, *ovvero* CO, OM *eguale al quadrato di* IL (Tav. II. fig. 7.).

Per la prop. 11., è $CO . DV = Pp^2 - AR^2$, e per la prop. 10., $MO . DV = AR^2 + qt^2$, quando S è il punto del fleſſo. Dunque $Pp^2 - AR^2 : AR^2 + qt^2 :: CO . DV : MO . DV :: CO : MO$. In oltre; $Pp : AR :: CO : CP = OL$ (prop. 8.) da cui deriva $Pp^2 - AR^2 : AR^2 :: CO^2 - OL^2 = CL^2 : OL^2$. Similmente $AR : qt :: PQ : MO$: (prop. 7.) che ſomminiſtra $AR^2 : AR^2 + qt^2 :: PQ^2 : PQ^2 + MO^2 = CL^2$. Dunque per la ragion perturbata; $Pp^2 - AR^2 : AR^2 + qt^2 :: PQ^2 : OL^2$, cioè $CO : MO :: PQ^2 : OL^2$, analogia che vale pel punto del fleſſo S oſſia Q. Soſtituito poi $ZO^2 - ZP^2$, ovvero $CL^2 - MO^2$ in vece di PQ^2, e $CO^2 - CL^2$ in vece di OL^2, ſarà $CO : MO :: CL^2 - MO^2 : CO^2 - CL^2$; e componendo $CM : MO :: CO^2 - MO^2 : CO^2 - CL^2$; e moltiplicando i termini della prima ragione per $CO - MO$; $CM (CO - MO) : MO (CO - MO) ::$

CO^2

$CO^2 - MO^2 : CO^2 - CL^2$. Ma $CM\ (CO - MO) = CO^2 - MO^2$. Dunque $CO^2 - CL^2 = MO\ (CO - MO) = CO \cdot MO - MO^2$; ovvero aggiungendo a un tratto $MO^2 + 2\, CO \cdot MO$; $CO^2 + 2CO \cdot MO + MO^2 - CL^2 = 3CO \cdot MO$: la quale eguaglianza, per Euclide, equivale a quest' altra $CM^2 - CL^2 = 3CO \cdot MO$, ossia $CN^2 - CL^2$, lo stesso che $IL^2 = 3CO \cdot MO$.

Prop. XIII.

Determinare nella curva il punto del flesso S (Tav. II. fig. 8.).

Le rette CL, IL, CH, CN significhino il medesimo che nella fig. 7., e compiuto sì il quadrante NIf, che il rettangolo $ILCQ$, dal punto N si sottenda la corda $NA = CN$, cui sia parallela QT, che incontra CN in T. Dipoi sopra Cf descritto il semicerchio CGf, da T si meni una parallela a Cf, che seghi il cerchio ne' due punti u, V; e dal punto più lontano V si abbassi sul diametro Cf la perpendicolare VR. Alla IL dal centro C si adatti $CO = CR$, che si produca fino al quadrante in M. Presa finalmente $Ck = OL$; $Kk = MO$, alla perpendicolare che da k si innal-

za sull' asse si adatti $KS = CL$; sarà S il ricercato punto di flesso.

Sulla CN cada la normale AD, e sia condotto il raggio CA. Perchè $CA = AN$, sarà $CD = DN$, onde $AN = 2DN$; $AN^2 = 4DN^2$; e quindi $AD^2 = 3DN^2$. Ma, per costruzione, sta $AD : DN :: QC = IL : CT$. Dunque sarà anche $QC^2 = 3CT^2$, ovvero $IL^2 = 3RV^2$, cioè $IL^2 = 3CR . Rf$, lo stesso che $IL^2 = 3CO . MO$. Dunque, per la precedente, sarà S il punto di flesso.

Scolio 1. Ove L cada sopra N, come nella fig. 1. Tav. II., la LO prodotta passa tutta sopra il semicerchio FNf: e però non si può in tal caso determinare la IL della fig. 8. Tav. II., da cui dipende la CT, o RV, e quindi le parti del raggio CR, Rf, ovvero CO, MO, che ci danno il flesso. Dunque essendo $CL > CN$, la curva non ha flesso, e rivolge sempre la sua concavità all' asse come nella fig. 3. Tav. I., somigliando in qualche maniera all' Elisse.

Scolio 2. Se L cade in N (Tav. 2. fig. 8.), diventa nulla la IL, ossia la QC. Dunque la CT è zero, e le due intersezioni u, V coincidono ne'

ne' due punti C, f, perchè calata la normale ur, quando CT, o $ur=0$, il punto r cade in C, e la Cr pure $=0$; onde questa da C non si può adattare alla IL. La seconda intersezione in f fa, che la CR diventa la Cf, la quale adattata alla IL, perchè $CL=CN$, cangia la CO nella CN, e rende nulla la MO e la $OL=Ck$. Dunque S coincide con N, ove è ancora H primo punto della curva, come si vede nella fig. 2. Tav. II. Ma abbiamo osservato allo Scol. 1. della prop. 9., che la curva della suddetta fig. 2. è concava dall'una e dall' altra parte di CN. Dunque il convesso della curva si concentra tutto nel punto N, cioè la convessità è realmente nulla.

Scolio 3. Sia ora $CL<CN$, ma $>CD$, ossia maggiore della metà del raggio, che è il caso della fig. 3. Tav. II. A questa ipotesi è adattabile tutto ciò che si è detto in questa proposizione; e dobbiam solo render ragione, perchè delle due intersezioni u, V (Tav. II. fig. 8.) ci siam serviti della più lontana V e non della più vicina u, la quale parrebbe, che potesse determinare un secondo flesso. Ora io dico, che ove sia $CL>CD$, la Cr non potrà mai adattarsi alla IL; perchè; es-

essendo $AD : DN :: QC : CT :: IL : CT$; e riuscendo IL minore di AD, sarà necessariamente $CT < CD$. Onde, poichè DGA tocca il semicerchio CGf nel punto di mezzo G, e fa che sia $DG = DC$, debb' essere la Tu ovvero la $Cr < CD$; e però sarà impossibile l'adattarla alla IL che è anche superiore ad AD.

Scolio 4. Consideriamo al presente il caso della fig. 4. Tav. II., in cui $CL = LN$, ed avvi punto di curva nel centro C. In tale supposizione la IL diventa la AD (Tav. II. fig. 8.); la CT diventa la CD; le due intersezioni V, u coincidono nel punto G; e le CR, Cr si fanno eguali al semiraggio CD. Dunque il punto O cade in D, e il punto M in N. Ma queste rette CD, DN, per la prop. 5. servono a determinare il punto di curva in C. Dunque ivi la curva avrà flesso; e perciò rettamente è stata delineata nella suddetta fig. 4., dove fuori del punto C, la curva progredisce senz' altro flesso.

Scolio 5. Resta finalmente il caso della fig. 5. Tav. II. in cui è $CL < CD$. Diventa allora $IL > AD$ siccome è chiaro (Tav. II. fig. 8.). Ora, poichè val sempre l'analogia $AD : DN :: QC = IL : CT$,

es-

essendo $IL > AD$, si fa anche $CT > DN$, ossia $CT > CD$; e quindi il punto T in tale ipotesi cade al di sopra di D: il che rende impossibile la intersezione della TV col semicerchio CGf, e per conseguenza impossibile il flesso nella curva, che realmente procederà sempre concava all'asse, siccome l'abbiamo nella fig. 5. delineata.

Prop. XIV.

Presa al solito LO *eguale all'ascissa* CP, *cui corrisponde l'ordinata* PQ, *e prodotta, se fa d'uopo, la* CO *fino all'interseziοne* M *col quadrante* fN: *indi descritto un cerchio col centro in* L *e col raggio* LC, *pel punto* M *si conduca alla circonferenza la* TV, *che faccia un angolo retto con* LV: *sarà* TV, *eguale alla normale* QS. (Tav. III. fig. 1. 2.)

Dal punto M si abbassi sull'asse la perpendicolare MD che tagli la LO in E; condotte le rette MS, OP, pel corol. 5. della prop. 9. tra lor parallele e secanti necessariamente il raggio CN ne' punti Z, G, si congiunga la LT. Per ragione de' triangoli simili LGO, GCP, e dell' eguaglianza de' lati LO, CP, sarà pure $OG = GP$.

Onde

Onde $MZ=ZS$, e quindi $CS=CD=LE$; dal che risulta ancora $OE=SP$. Ciò posto, per la prop. 4., abbiamo $PQ^2=CL^2-MO^2$. Ma lo stesso $PQ^2=SQ^2-PS^2=SQ^2-OE^2$. Dunque $CL^2-MO^2=SQ^2-OE^2$: e aggiunto il quadrato MO^2; $CL^2=SQ^2+MO^2-OE^2=$, ovvero, perchè $MO^2-OE^2=EM^2=LV^2$, e $CL^2=LT^2$; $LT^2=SQ^2+LV^2$; cioè $TV^2+LV^2=SQ^2+LV^2$. Onde $TV^2=SQ^2$, e $SQ=TV$.

Corol. 1. In tutte le modificazioni della curva, ove abbiamo la massima ordinata, ivi ancora è la massima normale. Imperciocchè o il punto L cade al di sopra di N, o al di sotto. Se cade sopra, come nella fig. 1., quando M e N coincidono, l' ordinata CH, che corrisponde a questo caso, è la massima di tutte le ordinate. Ma allora tirata NK parallela all' asse fino al cerchio di raggio CL, la retta TV diventa la NK eguale alla normale della curva nel punto H e maggiore di qualunque TV, cioè di qualunque altra normale. Dunque all' ordinata massima CH corrisponde la massima delle normali alla curva. Ove poi L resti al di sotto di N, come nella fig. 2., quando M cade in N, l' ordinata è CH, cioè la

mi-

minima delle ordinate, che terminano alla parte convessa della curva, e pel punto H abbiam la normale $= NK$ minore del raggio CL. Dal che si raccoglie, che la normale massima sarà quando la TV si fa eguale al raggio CL. Ma ciò avviene, quando M cade in I, punto d'intersezione della LO col quadrante fMN; e il punto M cade in I, quando l'ordinata alla curva è la massima di tutte le ordinate, come abbiamo dimostrato nella prop. 5. Dunque anche in tal caso la massima normale corrisponderà alla massima ordinata; e sarà vera generalmente la proposizione enunziata.

Corol. 2. Alzata un'altra ordinata pq alla curva infinitamente prossima alla prima PQ, e da q condotta l'altra normale, che sia qR, se da C alla LO prodotta, quando occorra, si tirerà la CA cosicchè sia $AO = Pp$, e dal punto B, ove la CA incontra il cerchio fMN, si calerà sull'asse la perpendicolare Bd, sarà $Dd = SR$. Imperciocchè all'istessa maniera, con cui abbiamo dimostrato essere $CD = CS$, dimostreremo ancora essere $Cd = CR$. Dunque $Dd = SR$.

Prop. XV.

Le due normali che ſpettano ai due punti Q, q *infinitamente vicini*, *ſiano* QS, qR. *Preparate poi le fig.* 3. 4. (Tav. III. fig. 3. 4.) *come le fig.* 1. 2., *prendaſi nella fig.* 3. *al di ſopra*, *e nella fig.* 4. *al di ſotto di* O *la retta* Om = OM. *Sarà* Pp : SR : : CO . Cm : SQ².

Dal punto m ſi tiri fino al diametro CZ del cerchio di raggio CL la retta mu parallela all' aſſe della curva; e poi ſi conduca fino alla CM la Be parallela allo ſteſſo aſſe, la quale tagli la MD nel punto b. Sta $AO : Bb$ in ragion compoſta di $AO : Be$. Ma $AO : Be : : CO : Ce : : CO : CM$,

$Be : Bb$

perchè Ce non differiſce da CM; e per ragione dell' angolo retto BMe; $Be : Bb$ in ragion duplicata di $Be : BM$, ovvero di $Me : Mb$, o di $CM : MD$, o finalmente di $CM : CV$. Dunque $AO : Bb$ in compoſta di $CO : CM$; cioè, perchè

$CM^2 : CV^2$

$AO = Pp$; $Bb = dD = SR$ pel corol. 2. della prop. 14; $Pp : SR : : CO . CM : CV^2$. Abbiamo in oltre $CM : CV : : Cm : Cu$; e moltiplicando gli antece-

cedenti per CO e i conseguenti per CV; $CO.CM : CV^2 :: CO.Cm : CV.Cu$. Ma essendo $MO = Om$, e in conseguenza $LV = Lu$, abbiamo anche $VZ = Cu$, e però $CV.Cu = CV.VZ = VT^2 = SQ^2$ pel corol. 1. della prop. 14. Sarà dunque $CO.CM : CV^2 :: CO.Cm : SQ^2$; e quindi $Pp : SR :: CO.Cm : SQ^2$.

Corol. Le due normali infinitamente vicine QS, qR prodotte concorrano in E, onde sia QE il raggio dell' osculo corrispondente al punto Q. Menata da Q una parallela all' asse, colla quale concorra, l'ordinata pq in t, e la normale Rq in r; sarà $QE : SE :: CO.Cm : QP^2$. Perchè, essendo QE, qE due raggi osculatori infinitamente vicini, e potendosi valutar come una retta l'archetto di curva Qq, sarà l' angolo Qqr retto, e avrassi $Qr : Qt$ in ragion duplicata di $Qr : Qq$, ovvero di $qr : qt$, o, per triangoli simili qrt, qRp, di $qR : qp$, o finalmente, perchè qR non differisce da QS, e qp da QP, di $QS : QP$. Onde $Qr : Qt = Pp :: QS^2 : QP^2$. Ma per la presente proposizione; $Pp : SR :: CO.Cm : QS^2$. Dunque, per la ragion perturbata; $Qr : SR :: CO.Cm : QP^2$; cioè, pei triangoli simili EQr, ESR, $QE : SE :: CO.Cm : QP^2$.

Prop.

Prop. XVI.

Determinare la grandezza del raggio dell' osculo per qualunque punto Q *della curva*. (Tav. III. fig. 5. 6.)

Prendasi nella CL la CB eguale all' ordinata PQ; e se il punto O cade al di sopra di M, nella CO prodotta si segni $Om = OM$ (Fig. 5.): se poi O cade al di sotto di M (fig. 6.) si segni inferiormente $Om = OM$; e in ambe le figure si congiunga mB. Facciasi poi l' angolo CBD eguale all' angolo CmB, e la retta BD tagli la CM in D. Trovata finalmente colla prop. 9. la QS normale alla curva, nella direzione della stessa normale si prenda QE quarta proporzionale dopo DO, CO, QS. Sarà QE il raggio osculatore che appartiene al punto Q.

Per ragione che si è fatto l' angolo $CBD = CmB$, i triangoli CDB, CmB, aventi l' angolo comune in C, sono simili, e vale l' analogia $Cm : CB :: CB : CD$, onde risulta $Cm . CD = CB^2 = PQ^2$. Sicchè, ripresa quella del corol. della precedente, e sostituitovi $Cm . CD$ in vece di PQ^2, avremo $CO . Cm : Cm . CD :: QE : SE$, ovvero $CO : CD :: QE : SE$. Onde per la fig. 5. sarà $CO - CD : CO :: QE - SE : QE$; e per la fig. 6; $CD - CO :$

$CO ::$

$CO :: SE - QE : QE$, cioè in tutte e due; $DO : CO :: QS : QE$.

Scolio 1. Applicando ora la proposizione ad alcuni punti principali della nostra curva, cercheremo prima di tutto il raggio dell'osculo, che compete al suo vertice A. Ivi l'ordinata PQ è zero, e diventa $MO = CL$ per la prop. 5. Onde, poichè sta $Cm : PQ :: PQ : CD$, essendo finita la Cm, e $PQ = o$, sarà anche $CD = o$, e però $DO = CO$. Dunque anche $QS = QE$, cioè pel punto A sarà il raggio osculatore eguale alla normale già trovata nella prop. 9. E siccome questo raziocinio vale per tutte le modificazioni della curva, diremo in genere, che il raggio dell'osculo al vertice A della Cassiniana è eguale alla normale della curva nello stesso punto A.

Scolio 2. Per la costruzione, che abbiamo fatto; $Cm . CD = PQ^2$, cioè per la prop. 4; $Cm . CD = CL^2 - MO^2 = (CL + MO)(CL - MO)$, onde nasce l'analogia $Cm : CL + MO :: CL - MO : CD$. Se L è sopra N, come nella fig. 5., diventa $Cm = CO + MO$; e se L è sotto N, come nella fig. 6., diventa $Cm = CO - MO$. Dunque pel primo caso; $CO + MO : CL + MO :: CL - MO : CD$;

e pel secondo; $CO-MO : CL+MO :: CL-MO : CD$. Supponiamo al presente, che sia $CL > CN$, e cerchiamo il raggio dell'osculo, che spetta al primo punto H della curva. In tale ipotesi il punto O cade in L e il punto M in N. Onde avremo; $CL+LN : CL+LN :: CL-LN : CD$, e quindi $CL-LN$, ossia $CN=CD$, che fa essere $DO=NL$. Ma $DO : CO :: QS : QE$; e la normale QS competente al punto H è eguale a CH per lo scol. 1. della prop. 9. Dunque $NL : CL ::$ CH : al raggio osculatore in H. Presa pertanto nella HC prodotta inferiormente la HK, che sia quarta proporzionale dopo NL, CL, CH, sarà HK il raggio d'osculo ricercato. Se poi L, e N coincidono, si fa nulla la NL, rimanendo finite ed eguali le altre rette CL, CH; e quindi il raggio d'osculo HK diviene infinito.

Scolio 3. Passiam' ora all'altra ipotesi di $CL < CN$, che abbraccia i tre casi; di $CL > \frac{CN}{2}$; di $CL = \frac{CN}{2}$, e di $CL < \frac{CN}{2}$. Sia in primo luogo $CL > \frac{CN}{2}$; e si voglia il raggio dell'osculo corrispondente al punto H. Richiamata l'analogia dello scolio precedente; $CO-MO : CL+MO :: CL-MO : CD$, che conviene alla supposizione

di

di L collocato ſotto N, rifletteremo, che pel punto H diventa $CO=CL$; $MO=LN$; e quindi $CL-LN : CL+LN=CN :: CL-LN : CD$. Dunque $CD=CN$, e per conſeguenza $DO=NL$. Laonde il raggio oſculatore HK, che ſi prende ſuperiormente, per eſſere la curva al principio conveſſa all' aſſe, ſarà, come nella fig. 5. quarto proporzionale dopo NL, CL, CH.

Scolio 4. Ma ſe $CL=\frac{CN}{2}$, deeſi avvertire, che ſi cadrebbe in paralogiſmo, facendo valere la ſuperiore analogia; $CL-LN : CN :: CL-LN : CD$, da cui pure trarrebbeſi $CD=CN$; e la ragione è queſta. Naſcendo la ſuddetta analogia dall' altra generale $CO-MO : CL+MO :: CL-MO : CD$, finchè la differenza tra CO, e MO ſarà una quantità finita, noi potrem farne uſo, e ſtabilir l'eguaglianza tra CD, e CN, perchè $CO-MO$ non è quantità diverſa da $CL-MO$. Ma ove tal differenza ſia infinitamente piccola, e parimente infinitamente piccola la differenza tra CL e MO, non vi ſarà più eguaglianza tra $CO-MO$, e $CL-MO$; e biſognerà rintracciare la proporzione, che paſſa tra queſte differenze. La qual coſa noi otterremo così. Si ecciti da N (Fig. 7.)

 una

una tangente al cerchio fN, che incontri la CM prolungata nel punto r, essendo l'intercetta LO eguale all'ascissa infinitamente piccola $Cp=pq$, ordinata corrispondente, per lo scolio 4. della prop. 9; si prenda poi nella OC, $Om=OM$. Poichè, per ipotesi, $CL=LN$ sarà anche $CO=Or$; $Cm=Mr$; e di più $rN=2OL$. Ora, per proprietà del cerchio, abbiamo; $CM+Cr : rN :: rN : rM=Cm$, ovvero, perchè Cr non differisce da CM; e $rN=2OL$; $2CM : 2OL :: 2OL : Cm$, cioè $CM : OL :: 2OL : Cm$; e prendendo le metà degli antecedenti, colla sostituzione di pq in vece di OL; $CL : pq :: pq : Cm$, che fa essere $Cm . CL=pq^2$. Ma per lo Scolio 2; $Cm . CD=PQ^2$, che nel caso presente è pq^2. Dunque $CD=CL$. Descritto pertanto col centro C e coll' intervallo CL l'archetto minimo LD, che seghi la CO in D, resterà determinata la DO, la quale sarà un' infinitamente piccola di second' ordine, perchè terza proporzionale dopo la finita CO, e la OL infinitamente piccola di primo. Si ripigli presentemente l'analogia solita $DO : CO :: QS : QE$. In questa adattata al caso nostro la normale QS è infinitesima di prim' ordine per lo Scolio 4.

della

della prop. 9; e la CO è finita. Dunque QE, ovvero il raggio dell'osculo al punto C sarà quarto proporzionale dopo un infinitesimo di second' ordine, un finito, e un infinitesimo di prim' ordine; il che vuol dire, che il raggio d'osculo spettante a C diventa infinito. E poichè in C la curva taglia l'asse ad angolo semiretto, se colla CT divideremo egualmente l'angolo retto NCA; indi alla stessa CT farem normale la CK, sarà questa la direzione del raggio d'osculo in C di grandezza infinita.

Scolio 5. Nello scolio 3. della presente proposizione abbiamo determinato generalmente la CD (Fig. 6.) con questa proporzione $CO - MO : CL + MO :: CL - MO : CD$. Suppongasi ora, che D cada in O cosicchè sia $CD = CO$; e sarà $CO - MO : CL + MO :: CL - MO : CO$; onde fatto il rettangolo degli estremi e de' medj; $CO^2 - CO . MO = CL^2 - MO^2$. Aggiungasi a ciascuna di queste quantità eguali il quadrato MO^2 con di più $3CO . MO$; e risulterà; $CO^2 + 2CO . MO + MO^2 = CL^2 + 3CO . MO$, cioè, per Euclide, CM^2, ossia $CI^2 = CL^2 + 3CO . MO$; e detratto CL^2; $CI^2 - CL^2 = 3CO . MO$, o finalmen-

te $IL^2 = 3CO.MO$. Ma per la prop. 12., quando ſi verifica queſt' ultima eguaglianza, la retta CO ſerve a determinare il punto del fleſſo Q. Dunque per queſto punto divien $CD = CO$, e per conſeguenza $DO = o$. Eſſendo poi generalmente $DO : CO :: QS : QE$, ove pel caſo che conſideriamo ſi fa $DO = o$, e CO, QS ſono quantità finite, egli è evidente, che nel punto del fleſſo ſarà il raggio oſculatore infinito. In Q termina la parte conveſſa HQ della curva, e comincia la concava. Se però ſi conſidererà Q come limite del conveſſo, converrà prendere il raggio infinito QE al di ſopra di Q. Se poi ſi conſidererà come limite del concavo, ſarà meſtieri collocare il raggio Qe infinito ed eguale a QE al di ſotto di Q; e la curva avrà realmente in Q i due raggi oſculatori infiniti QE, Qe.

Scolio 6. Nelle fig. 6. 7. 8. determineremo il raggio d' oſculo al punto G, cui corriſponde la maſſima ordinata GR, che è pure normale alla curva, nella ſeguente maniera. Egli è certo, per la prop. 5., che il raggio CM, inſerviente al ritrovamento del punto più ſublime G della curva, coincide ſopra CI; onde haſſi $CO = CI$, e $MO = o$.

Va-

Valendosi pertanto di CI, e di zero in vece di CO, e di MO nell' analogia; $CO - MO : CL + MO :: CL - MO : CD$, risulterà $CI : CL :: CL : CD$; e quindi la CD diventerà la Cd, se si abbasserà da L la normale Ld sopra CI; e dI diventerà la DO. Ma $DO : CO :: QS : QE$, e la QS rispetto al punto G è appunto l' ordinata GR. Dunque $dI : CI :: GR : QE$. Il perchè presa al di sotto di G la retta GZ, che sia eguale alla quarta proporzionale dopo dI, CI, GR, sarà GZ la grandezza del raggio d' osculo in G.

Scolio 7. Riman da ultimo, che nella fig. 8. si determini il raggio osculatore al punto H. Ivi, poichè la curva taglia l' asse ad angolo retto, e l' ordinata è nulla, la sunnormale sarà eguale alla normale. Onde, condotta la CM cosicchè sia $OL = CH$, e fatto poi $CO : OM :: CH : HK$, resterà nota la normale HK, che compete a H. Ora essendo, per la prop. 5., $CO = NL$; $MO = CL$, nella analogia $CO - MO : CL + MO :: CL - MO : CD$ introdotti i valori di CO, MO, avremo $NL - CL : 2CL :: o : CD$; il che vuol dire, che debb' essere anche $CD = o$, e in conseguenza $DO = CO = NL$. Ma come $DO : CO$, così deve stare la normale

 HK

HK al raggio d' osculo in *H*. Dunque, attesa l' eguaglianza de' termini *DO*, *CO*, concluderemo essere il raggio osculatore in *H* eguale alla stessa normale *HK*.

Scolio 8. Dalle cose sin quì dette si deduce, che non vi sarà punto di curva in tutte le modificazioni della Cassiniana, al quale non si sappia assegnare il raggio d' osculo corrispondente perchè ciò che abbiam detto del ramo che unicamente si è considerato, può estendersi a tutti i quattro rami simili, ed eguali, che ne compiono l' intero perimetro; e dalla direzione e grandezza de' raggi osculatori ne' punti principali della curva, riuscirà agevolissimo il tracciar l' andamento della sua evoluta, la quale secondo le diverse ipotesi della sua generata, va soggetta a curiosi e notabili cangiamenti.

PAR.

PARTE II.

Della nuova proprietà Meccanica della Caſſiniana.

Noi conſideriamo in queſta ſeconda parte ſol quell' ipoteſi di Caſſiniana, che pone il lato del quadrato coſtante eguale alla ſemidiſtanza de' fuochi; e intraprendiamo di dimoſtrare, che un grave, il quale in *C* (Tav. I. fig. 6.) ſi parta dalla quiete, moſſo unicamente dalla ſua gravità, la di cui direzione è nella tangente della curva al punto *C*, e ſia obbligato a diſcendère per l' arco *CQ*, impiega lo ſteſſo tempo nello ſcorrer qualunque arco *CQ* che impiegherebbe a ſcendere per la corda corriſpondente. Per evitare le ripetizioni diremo una volta per ſempre, che nelle figure ſuſſeguenti le rette *CL*, *CO*, *OM*, *LI* rappreſentano quelle medeſime linee, che hanno nelle precedenti rappreſentato; e ci richiameremo in mente, che la tangente in *C* fa un angolo ſemiretto coll' aſſe, e che *CL* è eguale alla quarta parte

te

te della distanza de' fuochi, cioè eguale alla metà del raggio del cerchio FNf, che ci ha servito fino ad ora a investigare le proprietà della nostra curva.

Prop. I.

Preso un archetto Qq *di curva infinitamente piccolo di primo ordine, dalle cui estremità partono le due ordinate infinitamente prossime* QP, qp *corrispondenti alle due ascisse* CP, cp, *si meni* Qtu *parallela all' asse, che seghi la* pq *in* t, *e sia poi la* tu *eguale alla differenza prima di* CO, *la quale nelle figure della Parte I. è rappresentata colla* AR: *tirate indi le due corde infinitamente prossime* CQ, Cq, *col raggio* CQ *tra le medesime corde si descriva l' archetto minimo* Qd, *onde venga ad esser* qd *la differenza di* QC. *Dico, che sarà* dq : tu : : 2CL : CQ. (Tav. IV. fig. 1.)

Dal punto t s' intenda condotta la tm normale alla dq; e si segni il punto n, in cui la dq è tagliata dalla Qt. Saranno simili i triangoli Cqp, qtm, mtn, ndQ, siccome è chiaro. Onde avremo $Cq : Cp :: Qn : nd :: nt : nm$, ovvero; $Cq : Cp ::$

Qn

$Qn + nt : nd + nm$, ossia $Cq : Cp :: Qt : dm$ o, perchè $Qt = Pp$, e Cq non differisce da CQ, nè Cp da CP, $CQ : CP :: Pp : dm$. Ma (prop. 8. parte 1.) $CP : CO :: tu : Pp$. Dunque, per la ragion perturbata; $CQ : CO :: tu : dm$; e alternando; $CQ : tu :: CO : dm$. Similmente sta $Cq : qp$, ovvero, perchè sì Cq, CQ, come anche qp, QP si possono assumere siccome eguali; $CQ : QP :: qt : qm$; e per la prop. 7. parte 1; $QP : MO :: tu : qt$, sarà nuovamente per la ragion perturbata; $CQ : MO :: tu : qm$; e permutando; $CQ : tu :: MO : qm$. Dunque; $CO : dm :: MO : qm$, ossia $CO : MO :: dm : qm$; e componendo; $CO + MO : MO :: dm + qm : qm$. Ma nella nostra ipotesi diventa $CO + MO = 2CL$, e abbiam già $dm + qm = dq$. Dunque $2CL : MO :: dq : qm$; e: $2CL : dq :: MO : qm$; cioè, sostituita la ragione eguale a quest' ultima; $2CL : dq :: CQ : tu$, che dà ancora; $dq : tu :: 2CL : CQ$.

Scolio. E' facile applicare la dimostrazione al caso di un archetto Qq, il quale si prendesse in tal situazione della curva che facesse cadere il punto M al di sotto di O.

Prop.

PROP. II.

Poste le cose medesime della precedente proposizione, sarà Qq : tu : : CQ.CL : CP.PQ.

Si tiri la retta qu, e si adatti da q all' asse CP la retta $qz = CL$, e si congiunga la zu. Per la prop. 7. parte I., zq, zu sono eguali, ed essendo l' angolo qzu infinitamente piccolo, si potrà considerare come retto l'angolo zqu. Ora, per la prop. 8. parte I., sta $Qt : tu :: CO : CP$; e quadrando; $Qt^2 : tu^2 :: CO^2 : CP^2$; e dividendo; $Qt^2 - tu^2 : tu^2 :: CO^2 - CP^2 : CP^2$. Ma $CO^2 - CP^2 = CO^2 - LO^2 = CL^2$ (prop. 4. parte I.). Dunque; $Qt^2 - tu^2 : tu^2 :: CL^2 : CP^2$. Oltracciò; $tu : tq :: PQ : MO$, (prop. 7. parte I.), onde si deduce; $tu^2 : tu^2 + tq^2 :: PQ^2 : PQ^2 + MO^2$, cioè, essendo $tu^2 + tq^2 = qu^2$, e $PQ^2 + MO^2 = CL^2$ (prop. 4. parte I.), $tu^2 : qu^2 :: PQ^2 : CL^2$. Sicchè, per la ragion perturbata, avremo; $Qt^2 - tu^2 : qu^2 :: PQ^2 : CP^2$; e componendo; $Qt^2 - tu^2 + qu^2 : qu^2 :: PQ^2 + CP^2 : CP^2$. Ma $Qt^2 + qu^2 - tu^2 = Qt^2 + tq^2 = Qq^2$; e $PQ^2 + CP^2 = CQ^2$. Dunque; $Qq^2 : qu^2 :: CQ^2 : CP^2$, ovvero $Qq : qu :: CQ : CP$. E siccome pei triangoli simili qtu, zqp ab-

abbiamo $qu : tu :: zq : qp :: CL : PQ$, sarà finalmente $Qq : tu$ in ragion composta di $CQ : CP$, cioè $CL : PQ$

$Qq : tu :: CQ . CL : CP . PQ$.

Lemma.

In un cerchio di diametro Qq *si sottendan due corde* QB, QG *per modo che congiunta la* qG, *e segnato il punto* S *di comune intersezione delle due rette* qG, QB, *sia* $Qq : QB :: QS^2 : QG^2 - GS^2$. *Dico, che se dal centro* K *si eccita fino alla* QB *la* KE *parallela alla* qG, *sarà il raggio* $Kq = BE$. (Tav. IV. fig. 2.)

Dai punti G, S si calino due normali, la prima GL sopra QS, e l'altra ST sopra Qq. Presa poi in QB la $LH = LS$, si congiungan le rette KB, Bq, TH, GH, l'ultima delle quali costituirà con GS il triangolo isoscele SHG. La costruzione subito ci presenta $QS . QL = QG^2$; $QS . SL = GS^2$; è però $QS . QL - QS . SL = QG^2 - GS^2$. Ma $QS - SL = QL - LH = QH$. Dunque $QS . QH = QG^2 - GS^2$. Ora, essendo per ipotesi $Qq : QB :: QS^2 : QS^2 - GS^2$, sarà eziandio $Qq : QB :: QS^2 : QS . QH$, ossia $Qq : QB :: QS : QH$. E perchè i trian-

triangoli ſimili QBq, QST ci ſomminiſtrano $Qq : QB :: QS : QT$, avrem $QH = QT$, ed iſoſcele il triangolo HQT. In oltre per ragione degli angoli retti QGS, QTS, ed oppoſti nel quadrilatero $QGST$, ſi potrà ad eſſo circoſcrivere un cerchio, il che fa eſſere tra loro eguali gli angoli alla circonferenza GSQ, HTQ, che poggian ſulla corda GQ. Ma $GSQ = qSB$, cioè per le parallele qS, KE, $GSQ = KEB$. Dunque $HTQ = KEB$. Riflettendo in fine, che nel triangolo iſoſcele KQB l'angolo KBE è uguale all'angolo TQH, ſi renderà chiaro, eſſere iſoſcele anche il triangolo KBE, perchè equiangolo all'altro HQT. Dunque KB, ovvero $Kq = Be$.

Prop. III.

Col diametro Qq *s'intenda deſcritto un cerchio minimo, che abbia il centro in* K, *e ſi prolunghi* CQ *fino alla circonferenza in* b: *Poſcia dai punti* Q, q *ſulla* CV *tangente della Caſſiniana in* C *le perpendicolari* QT, qa; *e la* qa *ſeghi reſpettivamente in* g, *e in* s *il circoletto e la retta* Qb. *Se dal centro* K *ſi menerà alla* Qb *la* Ke *parallela a* qg, *dico che ſarà* Kq = be. (Tav. IV. fig. 1.) L'or-

L' ordinata PQ prodotta incontri la Ca in V; e costituito l' angolo retto VCD la medesima QP concorra con CD in D: finalmente si protragga la tQ sino a B, ove incontra la CT. Perchè son semiretti gli angoli VCP, CVP, saran pur tali VQT, TBQ, DCP, CDP. Onde $TV=TB=TQ$. Di più $CV=CT+TQ$; $CB=CT-TQ$; $VD=2CP$. Ciò premesso, per la somiglianza de' triangoli VCD, VPC, avremo $CV:VD::PV:VC::PQ:CB$, cioè $CT+TQ:2CP::PQ:CT-TQ$, onde si trae $2CP.PQ=CT^2-TQ^2$, Ma, per la precedente $Qq:tu::CL.CQ:CP.PQ$, ovvero $Qq:tu::2CL.CQ:2CP.PQ$, e per la prop. 1; $tu:dq::CQ:2CL::CQ^2:2CL.CQ$. Dunque per la ragion perturbata; $Qq:dq::CQ^2:2CP:PQ$; cioè $Qq:dq::CQ^2:CT^2-TQ^2$. Oltre di ciò, per ragione dell' angolo infinitamente piccolo bCq, e degli angoli retti Qbq, Qdq non essendo dq diversa da Qb; e perchè son simili i triangoli QCT, Qsg, e in conseguenza le rette Qs, Qg, gs analoghe alle rette CQ, CT, TQ, potendosi nella proporzione quelle a queste sostituirsi, avrem' anche $Qq:Qb::Qs^2:Qg^2-gs^2$; e quindi pel Lemma $Kq=be$.

Corol.

Corol. Dedurremo dalla proposizione, essere $Qq . CT = 2Qb . CT - CQ . Qg$. Imperciocchè $be = Kq = Qb - Qe$; e perciò $2Kq = Qq = 2Qb - 2Qe$. Onde $Qq . CT = 2Qb . CT - 2Qe . CT$, ovvero, perchè $2Qe = Qs$; $Qq . CT = 2Qb . CT - Qs . CT$. Ma sta $CQ : CT :: Qs : Qg$, che ci dà $Qs . CT = CQ . Qg$. Dunque $Qq . CT = 2Qb . CT - CQ . Qg$.

Lemma I.

Volendosi oltre le quantità finite tener conto ancora delle infinitesime di prim' ordine; dico, che tra due rette, una delle quali sia finita, e l' altra infinitamente piccola di prim' ordine, la media aritmetica, sarà eguale alla media geometrica. (Tav. IV. fig. 3.)

CE finita, Eq infinitesima di prim' ordine costituiscano una sola retta; e sulla intera Cq si descriva il semicerchio CFq. Da E sino alla circonferenza si ecciti la normale EF; e divisa la Eq per metà in i si congiunga la CF. Poichè Eq è divisa egualmente in i, e ad essa si aggiunge la EC, sarà per Euclide; $Cq . CE + Ei^2 = Ci^2$. Ma per essere Eq, e in conseguenza Ei infinitesima di prim' ordine, il quadrato di Ei è una quantità infini-

finitesima di secondo. Negletto pertanto Ei^2, sarà $Cq.CE = Ci^2$. Ora è anche $Cq.CE = CF^2$; il che fa essere $Ci^2 = CF^2$, ovvero $CF = Ci$. Ma CF è media geometrica; Ci media aritmetica tra CE, e Cq. Dunque la media aritmetica è eguale alla media geometrica.

Lemma 2.

Nel triangolo Crq, *che ha l' angolo in* C *infinitesimo di prim' ordine, se essendo finiti i lati* Cr, Cq, *si tirerà* QE *parallela a* rq *cosicchè abbiansi i segmenti* Qr, Eq *infinitesimi di prim' ordine; ove si voglia sol tener conto delle quantità infinitesime di prim' ordine, sarà* Ei *metà di* Eq *eguale a* Ql *metà di* Qr. (Tav. IV. fig. 4.)

Da E fino a rq si conduca la Eh parallela a Qr. Pei triangoli simili CQE, Ehq sarà $CQ : QE :: Eh : hq$. Ma CQ è finita; QE, Eh infinitesime di prim' ordine. Dunque hq infinitesima di secondo. Sicchè, se col centro E, e col raggio Eh si descriverà fino alla Eq l' archetto minimo ho, essendo necessariamente $hq > qo$, sarà qo, cioè la differenza di Eq, e di Eh, ossia di Eq, e di Qr

E non

non maggiore di un infinitesimo di second'ordine; e però $Eq = Qr$, cioè $Ei = Ql$.

Prop. IV.

Nella Cassiniana, in cui la semidistanza de' fuochi è eguale al lato del quadrato costante, se si prenderà come verticale la tangente della curva nel centro C, *e si lascierà da questo punto partir dalla quiete un grave, che sia costretto a discendere per l'arco* CZQ: *dico, che il tempo impiegato a scorrere l'archetto infinitamente piccolo* Qq *sarà eguale alla differenza de' tempi, che impiegherebbe a discendere per le corde* Cq, CQ. (Tav. IV. fig. 5.)

Preso nella curva l'archetto Qq infinitamente piccolo di prim'ordine, e tirate le corde infinitamente vicine CQ, Cq, indi condotte ad angolo retto con CR verticale le ordinate QT, qa, si produca CQ fino ad aq in r, e TQ fino a Cq in E: fatta poi Qg parallela ed eguale a Ta, e divise egualmente ne' punti i, l le rette Eq, Qr, col raggio CQ tra le due corde si descriva l'archetto Qd. Egli è certo per il Lemma 1., che Ci sarà media o geometrica o aritmetica tra CE, e Cq:

lo ſteſſo vuolſi dire ancora della retta Cl, che rà media tra CQ, e Cr. Ciò poſto (chiamato ' generalmente il tempo) le Teorie meccani- ıe c' inſegnano eſſere T per $CQ : T$ per $CE : :$ $Q : CE$; e T per $CE : T$ per Cq in ragion di- ıidiata di $CE : Cq$, cioè pel Lemma 1; T per $E : T$ per $Cq : : CE : Cq - qi$. Dunque T per $CQ :$ ' per $Cq : : CQ : Cq - qi$; e convertendo T per $CQ :$ ' per $Cq - T$ per $CQ : : CQ : Cq - CQ - qi$, ovve- ›, perchè $Cq - CQ = dq$; T per $CQ : T$ per $Cq - T$ ır $CQ : : CQ : dq - qi$; e moliplicando queſt' ulti- ı ragione per $2CT$; T per $CQ : T$ per $Cq - T$ r $CQ : : 2CQ . CT : 2dq . CT - 2qi . CT$. Ma pel ımma 2; $2qi = 2lr = Qr$. Dunque T per $CQ : T$ r $Cq - T$ per $CQ : : 2CQ . CT : 2dq . CT - Qr . CT$. ırchè poi ſon ſimili i triangoli CTQ, Qgr, avre- › $CT : CQ : : Qg : Qr$, onde riſulta $Qr . CT =$ $Q . Qg$. Sicchè T per $CQ : T$ per $Cq - T$ per $Q : : 2CQ . CT : 2dq . CT - CQ . Qg$. Sarà in oltre per $CQ : T$ per Cr in ragion ſudduplicata di $Q : Cr$, cioè pel Lemma 1. $: : CQ : CQ + Ql$; e rò convertendo T per $CQ : T$ per $Cr - T$ per Q, oſſia T per $CQ : T$ per $Qr : : CQ : Ql : : 2CQ :$ r. Ma, eſſendo in Q le velocità eguali o vada

 il

il corpo per Qr o per Qq, abbiamo T per Qr: T per Qq : : $Qr : Qq$. Dunque T per CQ : T per Qq in ragion composta di $2CQ : Qr$, cioè : : $2CQ$:

$$\frac{Qr : Qq}{Qq}$$

Qq; e moltiplicata quest' ultima ragione per CT; T per CQ : T per Qq : : $2CQ . CT : Qq . CT$, ovvero pel corol. della prop. 3., surrogata dq in vece di Qb, che le è eguale; T per CQ : T per Qq : : $2CQ . CT : 2dq\ CT - CQ . Qg$. Ma più sopra abbiam trovato; T per CQ : T per Cq - T per CQ : : $2CQ . CT : 2dq . CT - CQ . Qg$, Dunque; T per Qq = T per Cq - T per CQ.

Corol. 1. Si metta la QR a squadra a squadra con CQ, e dal punto d' intersezione R colla verticale si spicchi RS normale a Cq. Sarà pei principj della Meccanica T per CR = T per CQ; e parimente T per CR = T per CS. Dunque T per CQ = T per CS, e in conseguenza T per Sq = T per Cq - T per CS = T per Cq - T per CQ. Onde T per Qq = T per Sq.

Corol. 2. Prendasi un altro archetto infinitesimo QN contiguo a Qq; e tirata la corda CN, a questa sia normale la NM, che incontra la verticale in M, da cui sulla Cq cada l' altra normale MO. Pei medesimi principj meccanici, sarà

T

T per $CM = T$ per $CN = T$ per CO. Ma T per $CQ = T$ per CS. Dunque T per $CQ - T$ per $CN = T$ per $CS - T$ per CO. Ora, essendo T per $CQ - T$ per $CN = T$ per NQ; e T per $CS - T$ per $CO = T$ per OS, sarà pure T per $NQ = T$ per OS, e quindi T per $NQq = T$ per OSq. Lo stesso raziocinio si potrà estendere a quant' altri elementi si voglia sì nell' arco CZQ, come nella corda Cq.

Prop. V.

Nella Cassiniana della presente ipotesi la discesa per qualunque arco CZQ *di un grave che comincia a muoversi in* C, *si compie nello stesso tempo, che esso spenderebbe nel discendere per la corda* CQ.

Dopo ciò che s' è detto nella prop. 4. e suoi corollarj, la dimostrazione riesce agevolissima. A qualunque archetto della curva, principiando dall' ultimo Qq fino a C, noi sappiamo assegnare le successive porzioni della corda Cq, che si passan dal grave con moto isocrono a quello che impiegasi nello scorrere gli archetti corrispondenti; e tante saranno queste porzioni di corda, quanti so-

 no

no gli archetti minimi, che esauriscono tutto l' arco CZq. Dunque il tempo speso a scorrere la somma di tutti gli archetti da C sino a q sarà lo stesso che il tempo speso in passare per tutte le porzioni della corda Cq; cioè T per $CZq = T$ per Cq, ossia T per $CZQ = T$ per CQ.

Scolio. A motivo dell' inclinazione colla verticale CT dell' asse primario CV della nostra curva, la discesa del grave si farà per un certo arco CQ minore del semiperimetro CQV (Tav. IV. fig. 6.). Continuando poi il corpo a muoversi, egli in vece di discendere, ascende, siccome è chiaro. Ora si fa evidente, che nell' ultimo punto Q della discesa, la orizzontale QT debb' essere tangente della curva; e la Geometria degl' infinitamente piccoli c' instruisce, che relativamente al punto Q la differenza di CT è nulla, e la differenza di TQ si fa eguale alla differenza dell' arco CQ, colla quale coincide. Sarà dunque pel punto Q, $Qg = o$ (Tav. IV. fig. 5.); $gq = Qq$. Ma pel corol. della prop. 3. abbiamo generalmente $Qq \cdot CT = 2Qb \cdot CT - CQ \cdot Qg$. Dunque ove la orizzontale è tangente della curva, $Qq = 2Qb$, cioè l' archetto minimo eguale al doppio della dif-

ferenza

ferenza della corda CQ. Ora, per la prop. 1., sta dq, ossia $Qb : tu :: 2CL : CQ$; il che dà $2Qb : tu :: 4CL . CQ : CQ^2$; e per la prop. 2; $2Qb : tu :: 4CL . CQ : 4CP . PQ$. Onde pel punto Q avremo; $CQ^2 = 4CP . PQ$.

Prop. VI.

Significando le rette della fig. 6. Tav. IV. *segnate colle stesse lettere quel medesimo che significano nella* fig. 6. Tav. 1; *dico, che se alla* LI *prodotta si adatta* CO = CL + LI, *e, presa* CP = LO, *si alza da* P *l'ordinata corrispondente* PQ, *sarà* Q *il punto ultimo della discesa del grave per la curva.*

Essendo per costruzione $CO = IL + CL$; $CO = CM + MO = 2CL + MO$, sarà pure $2CL + MO = IL + CL$, cioè $CL + MO = IL$, ovvero $MO = IL - CL$: onde si deduce $CO - CL = IL$; $CO + CL = IL + 2CL$; $CO + MO = 2IL$; E perchè $CO - MO = CM = 2CL$, sarà ancora $IL + CL - MO = 2CL$; e detratta la IL; $CL - MO = 2CL - IL$. In oltre dalla prop. 4. parte 1. abbiamo $CP^2 = CO^2 - CL^2$; e $PQ^2 = CL^2 - MO^2$; e fattane la somma; $CP^2 + PQ^2 = CQ^2 = CO^2 - MO^2$, che

 dà

dà $CO+MO:CQ::CQ:CO-MO$, ovvero $2IL:CQ::CQ:2CL$, e paſſando ai quadrati; $4IL^2:CQ^2::CQ^2:4CL^2$. Parimente abbiamo $CO-CL:CP::CP:CO+CL$; cioè $IL:CP::CP:2CL+IL$; di più $CL+MO:PQ::PQ:CL-MO$, oſſia $IL:PQ::PQ:2CL-IL$; ſicchè componendo le ragioni; $IL^2:CP.PQ::CP.PQ:4CL^2-IL^2$; e, perchè $IL^2=CM^2-CL^2=4CL^2-CL^2=3CL^2$, che fa eſſere $4CL^2-IL^2=CL^2$, la ſuddetta analogia ſi cangierà in queſt' altra; $IL^2:CP.PQ::CP.PQ:CL^2$; e pigliando i quadrupli de' termini; $4IL^2:4CP.PQ::4CP.PQ:4CL^2$; dal che s' inferiſce eſſere $4CP.PQ$ medio proporzionale tra $4IL^2$ e $4CL^2$. Ma tra queſti ſteſſi termini è ancora medio proporzionale CQ^2. Dunque $CQ^2=4CP.PQ$; e quindi, per lo ſcolio della prop. 5., ſarà Q il punto ultimo della diſceſa del grave per la curva.

Corol. 1. Quindi raccoglieremo, che eſſendo TQZ tangente della curva in Q, prodotta la QP finchè taglia nuovamente la curva in q, e condotta per q la verticale tqZ, che incontra le due tangenti orizzontali Ct, TQ ne' punti Z, t, anche queſta verticale toccherà la curva in q. Imper-

perciocchè, per la somiglianza ed eguaglianza degli archi Vq, VQ, debb'essere l'angolo, che fa la tangente in q con qP, eguale all'angolo ZQP. Ma, perchè $Pq = PQ$, condotta la Cq, sarà anche $Cq = CQ$; e l'angolo $CqP = CQP$, come pure $PCq = PCQ$. Dunque i complementi qCT, QCT ai semiretti tCP, PCT sono eguali; onde per ragione de' retti angoli in t, T e dell' eguaglianza delle linee Cq, CQ, son simili ed eguali i triangoli tCq, TCQ, per cui gli angoli Cqt, CQT, e in conseguenza gl' interi angoli tqQ, TQq, ond' anche i loro complementi a due retti, cioè ZqQ, ZQq, si rendono eguali. Dunque la verticale Zq è tangente della curva nel punto q.

Scolio. Sino che il grave scorrerà l'arco CQq, il canale curvo, per cui discende e poi ascende, soffrirà dal grave medesimo de' varj gradi di pressione; e la gravità non agirà tutta intera, se non quando il corpo sarà arrivato in q, ove cessa quella parte di pressione contro il canale concavo che ha origine dal peso del corpo. Ma siccome in q il grave conserva ancora la velocità corrispondente all' altezza CR determinata nell' asse CT dalla orrizzontale qR, colla qual velocità, se fos-

ſe tutt' a un tratto diſimpegnato dal canale, ſalirebbe per la retta qt colla legge Galileana de' moti ritardati, così eſſendo obbligato ad uniformare la direzione del ſuo movimento alla curvità del canale qC, potrà anche più oltre del punto q premere contro il canale in virtù della forza centrifuga che gli rimane; e ciò finchè queſta forza abbia un' energia maggiore di quella, con cui tenta la gravità di ſtaccarlo dalla curva. Debb' eſſer dunque un oggetto degno delle noſtre ricerche quel punto dell' arco qC, ove s' equilibrano queſte due forze, ed ove ſuccederà l' abbandonamento del canale, che farà il corpo.

Prop. VII.

Da un punto Q *della curva ſi tiri ſino all' aſſe a normale* QS; *e ſarà* CO : CQ :: CL : QS. (Tav. IV. fig. 7.)

Per la prop. 8. parte 1., ſta $Pp : tu :: CO : CP :: CO.PQ : CP.PQ$; e per la prop. 2., $tu : Qq :: CP.PQ : CQ.CL$. Dunque $Pp : Qq :: CO.PQ : CQ.CL$. Ma, perchè QS è normale, abbiamo $Pp : Qq : PQ ; QS :: CO.PQ : CO.QS$. Dunque

CQ.

$CQ.CL = CO.QS$; e quindi $CO : CQ :: CL : QS$.

Prop. VIII.

Arrivato il corpo a qualunque punto Q *del canale, rappresenti* QG *parallela alla verticale* CT *la gravità assoluta, e dessa tagli l'asse primario della Cassiniana in* V. *Condotta poi sino alla* CV *la* QS *normale alla curva, con questa, se occorre, prodotta faccia angolo retto la* Gg; *e siano* CP, PQ *le coordinate ortogonali rispetto all'asse* CV, *e* CT, TQ *le coordinate ortogonali rispetto all'asse della discesa, e la* TQ *seghi la* CV *in* K. *Dico, che sarà* $Qg : 2QG :: PV.SK : 2QV.QS$. (Tav. IV. fig. 7.)

Si conduca SE normale a QT. Pei triangoli simili QSE, QGg, sta $Qg : QG :: SE : QS :: SE.QV : QS.QV$; e per gli altri triangoli simili SEK, PQV; $SE : SK :: VP : VQ$, onde nasce $SE.QV = VP.SK$. Dunque, sostituendo; $Qg : QG :: VP.SK : QS.QV$, ovvero $Qg : 2QG :: VP.SK : 2QS.QV$.

Prop.

Prop. IX.

Sia Q *il punto ricercato, ove cessa la pressione contro la curva, e si chiami* R *il raggio d' osculo ad esso appartenente. Sarà* VP.SK:2QS.QV::CT:R. (Tav. IV. fig. 7.)

Per le regole meccaniche, rappresentando Qg la forza centripeta, che nasce dalla risoluzione della gravità assoluta QG nelle due Qg, Gg, e si dirige al centro del raggio osculatore, ove questa sia eguale alla centrifuga, che ritiene il grave attaccato al canale, il rettangolo fatto da Qg, e dal raggio R è eguale al quadrato della velocità per la curva. Ma per le formole Galileane, il quadrato della velocità per la curva è anche eguale al doppio rettangolo della gravità QG moltiplicata nell' altezza di discesa CT. Dunque sarà $Qg.R = 2QG.CT$; e però Qg: $2QG::CT:R$, cioè, per la precedente; $VP.SK$: $2QS.QV::CT:R$.

Corol. I triangoli simili CKT, PQV somministrano $QV:CK::VP:CT$, onde risulta $QV.CT = CK.VP$. Ma $VP.SK:2QS.QV::CT:R::QV.CT:QV.R$. Dunque avremo ancora; $VP.SK$:

2QS.

$2QS : QV :: VP . CK : QV . R$, cioè $SK : CK :: 2QS : R$.

PROP. X.

Nel punto Q, *in cui il grave abbandona il canale*, *sarà* 3CO − 3CL : CO :: SK : CK. (Tav. IV. fig. 7.)

Allo scolio 2. della prop. 16. parte 1., in cui si determina il raggio osculatore della Cassiniana, abbiam veduto valere l'analogia (Fig. 6. Tav. III.); $Cm : CL - MO :: CL + MO : CD$. Ma, pel caso della nostra curva, $Cm = CM - Mm = 2CL - 2MO$. Dunque $2 : 1 :: CL + MO : CD$, onde si trae $2CD = CL + MO$, ossia $2CD = 3CL - CO$, perchè $MO = 2CL - CO$. Essendo poi $CL < CO$, sarà $3CL - CO < 2CO$, e quindi $2CD < 2CO$, cioè $CD < CO$, il che stabilisce il punto D al di sotto di O, onde avremo $CD + DO = CO$, e $2CD + 2DO = 2CO$, ovvero $3CL - CO + 2DO = 2CO$, che dà $2DO = 3CO - 3CL$. Ma per la stessa prop. 16; $DO : CO :: QS$: al raggio osculatore, cioè $2DO : CO :: 2QS : R$. Dunque ritornando alla nostra fig. 7.; $3CO - 3CL : CO :: 2QS : R$, o per la prop. 9., $3CO - 3CL : CO :: SK : CK$.

Corol.

Corol. Raccoglieremo dalla propofizione anche queft' altra analogia; $4CO-3CL:CL::2CP:CP-PQ$. Perchè dall' averfi $3CO-3CL:CO::SK:CK$, rifulterà componendo $4CO-3CL:CO::CS:CK$. Ma $CO:MO::CP:PS$ (prop. 9. parte I.), e componendo $CO:2CL::CP:PS$. Dunque, per la ragion perturbata, $4CO-3CL:2CL::CP:CK::2CP:2CK$, o anche $4CO-3CL:CL::2CP:CK::2CP:CP-PQ$.

Prop. XL

Nel punto Q *del diftacco farà* $4CO+4CL:4CO-3CL::4CO-3CL:2CL$. (Tav. IV. fig. 7.)

Poichè pel fuperior corollario è $4CO-3CL:CL::2CP:CK$, fi ha convertendo $4CO-3CL:4CO-4CL::2CP:2CP-CK=CP+CP-CK=CP+PQ$. Componendo pertanto quefte ragioni con quelle del precedente corollario; $(4CO-3CL)^2:4CL\ (CO-CL)::4CP^2:CP^2-PQ^2$. Ora, effendo $CP^2=CO^2-CL^2=(CO-CL)\ (CO+CL)$; $PQ^2=CL^2-MO^2=(CL-MO)\ (CL+MO)$, e nel cafo della noftra curva $CO-CL=CL-MO$; $CO-MO=2CO-2CL$, varrà l'analogia $CP^2:$

$PQ^2::$

$PQ^2 :: CO + CL : CL + MO$; e convertendo $CP^2 : CP^2 - PQ^2 :: CO + CL : CO - MO = 2CO - 2CL$; e col prendere i quadrupli degli antecedenti; $4CP^2 : CP^2 - PQ^2 :: 4CO + 4CL : 2CO - 2CL :: 8CL(CO + CL) : 4CL(CO - CL)$. Onde colla sostituzione di questa ragione; $(4CO - 3CL)^2 : 4CL(CO - CL) :: 8CL(CO + CL) : 4CL(CO - CL)$. Sicchè, per l' eguaglianza de' conseguenti; $8CL \times (CO + CL) = (4CO - 3CL)^2$, che dà finalmente $4CO + 4CL : 4CO - 3CL :: 4CO - 3CL : 2CL$.

PROP. XII.

Determinare il punto del distacco del grave dalla curva. (Tav. IV. fig. 7.)

Sul raggio $Cf = 2CL$ si descriva il semicerchio CHf, e nella CL si tagli la CB, che sia $\frac{1}{4}$ di CL: condotta poi da B fino alla parte concava del semicerchio CHf la BH parallela a Cf, si chiuda il rettangolo $CBHo$; e si adatti alla IL la $CO = Co$. Finalmente presa $CP = LO$, secondo la regola, si determini la corrispondente ordinata PQ; e Q sarà il punto ricercato.

Dim.e Sottendasi la corda CH; ed abbiamo

$Cf . Co$

$Cf.Co = CH^2 = Co^2 + Ho^2$, o, perchè $Cf = 2CL = 8Ho$; $8Ho.Co = Co^2 + Ho^2$. Aggiungiamo dall' una e dall' altra parte la quantità $8Ho^2 - 6Ho.Co$; e risulterà; $2Ho.Co + 8Ho^2 = Co^2 - 6Co.Ho + 9Ho^2$, o (essendo $LB = 3Ho$, onde nasce $LB^2 = 9Ho^2$; $6Co.Ho = 2Co.LB$) $2Ho.Co + 8Ho^2 = Co^2 + LB^2 - 2LB.Co = (Co - LB)^2$. Passando perciò all' analogia, sta $Co + 4Ho = Co + CL : Co - LB :: Co - LB : 2Ho$; e quadruplicando i termini; $4Co + 4CL : 4Co - 4LB :: 4Co - 4LB : 8Ho$, cioè, perchè $Co = CO$; $4LB = 3CL$, e $8Ho = 2CL$; $4CO + 4CL : 4CO - 3CL :: 4CO - 3CL : 2CL$: Dunque per la precedente in Q si stacca il grave dalla curva.

Scolio 1. La velocità, che rimane al grave in Q, è proporzionale alla radice dell' altezza CT, ed è nella direzione della QZ tangente della Cassiniana in Q, siccome anche della Parabola, che liberato dal canale intraprende di descrivere il corpo. Per determinarne il vertice primario e il parametro, posto che la retta xu, la quale incontra la tangente QZ in y, sia la massima altezza della parabola, avrem per la teoria del moto de' projetti; $QZ^2 : ZT^2 :: 2CT : xy$; e per le paralle-

le

le xy, ZT; $ZT : QZ$, ossia $ZT^2 : QZ . ZT :: xy : Qy$. Dunque sarà ancora $QZ^2 : QZ . ZT$, ovvero $QZ : ZT :: 2CT : Qy$. Se pertanto nella tangente QZ prenderemo Qy quarta proporzionale dopo QZ, ZT e il doppio di CT, calata quindi sopra QT la normale yx, dividerem questa per mezzo in u, sarà u il vertice primario, Qx la semiampiezza, e la terza proporzionale dopo xu, Qx il parametro della parabola, per la quale, abbandonato il canale, viaggierà il grave liberamente.

Scolio 2. Abbiamo fino ad ora considerato aperto il canale, per cui muovesi il grave. Ma se supporremo, che in tutto il tratto della Cassiniana si muova per un canale chiuso, egli è evidente, che non potendosi da esso dipartir mai, dopo essere arrivato in Q, passerà nuovamente al punto C, dal quale ha cominciato il suo moto. Cosa però singolarissima accade in tale ipotesi, che è degna di riflessione. Preso da C verso Q qualunque arco finito Cc, il tempo impiegato dal grave a scorrere il canale CQc sarà finito, perchè finito è il tempo di discesa pel piano inclinato Cc. Ma se l'arco Cc è infinitamente piccolo, la curva tutta fino a c non si scorre che in un tempo infinito.

La

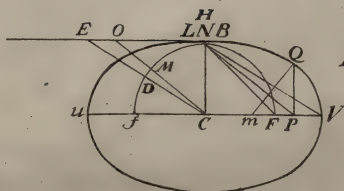
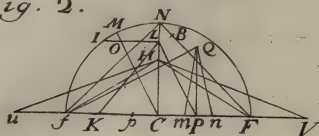
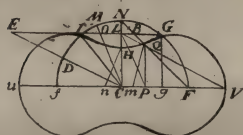
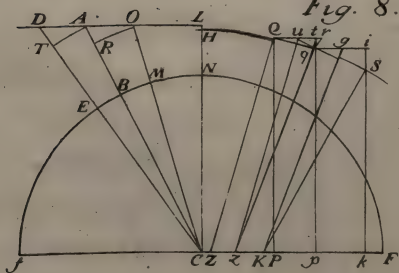
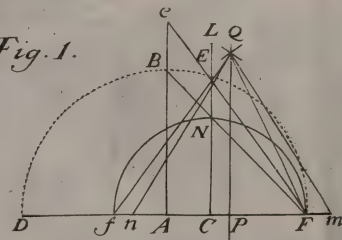
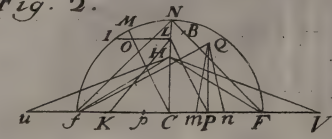
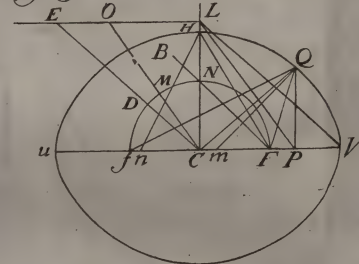
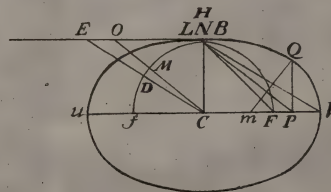
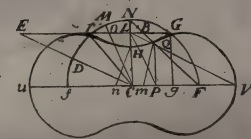
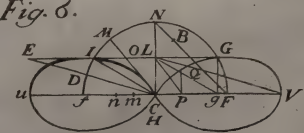
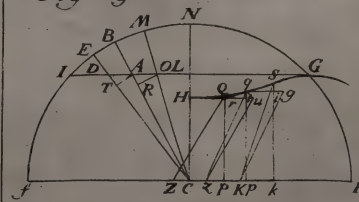
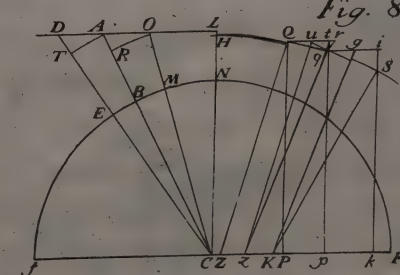
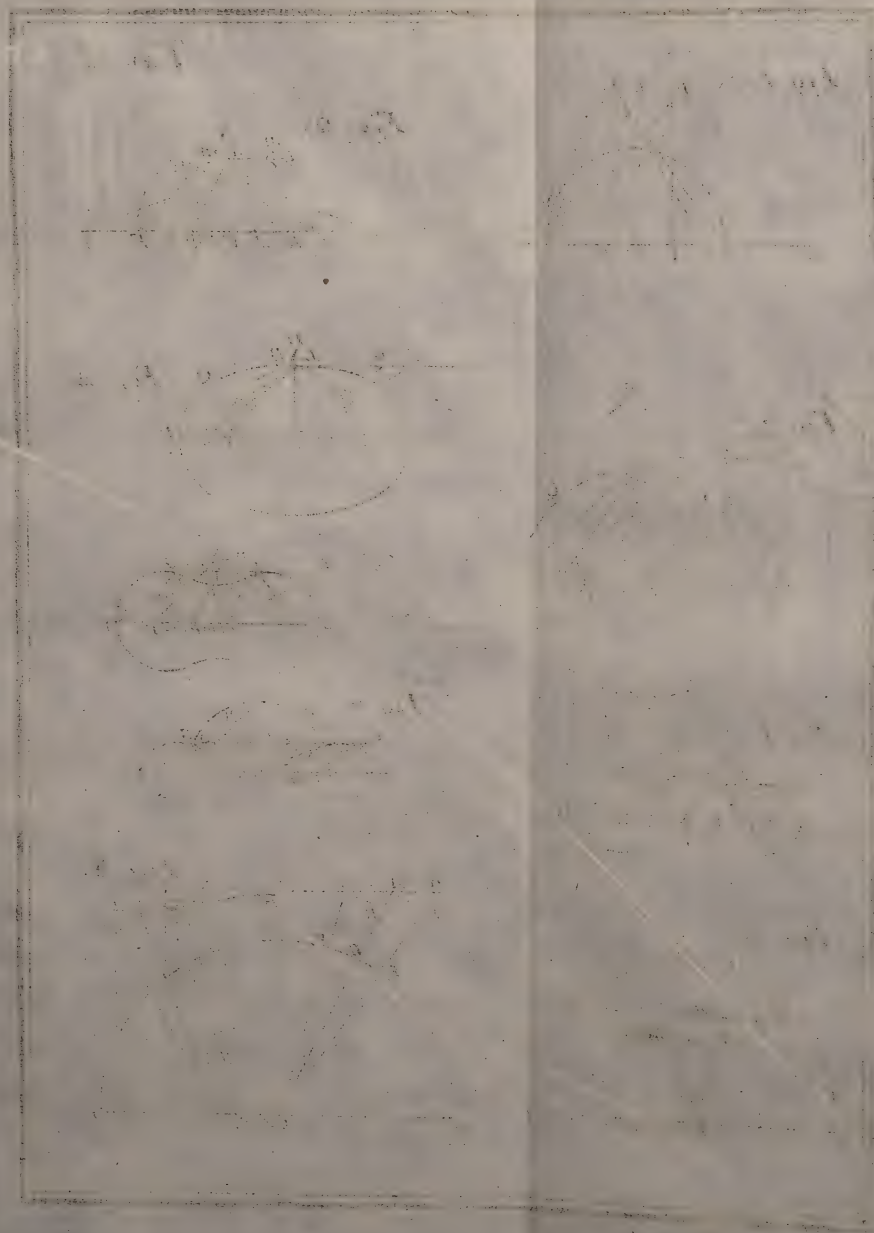
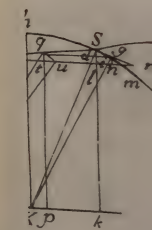
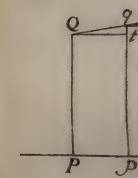
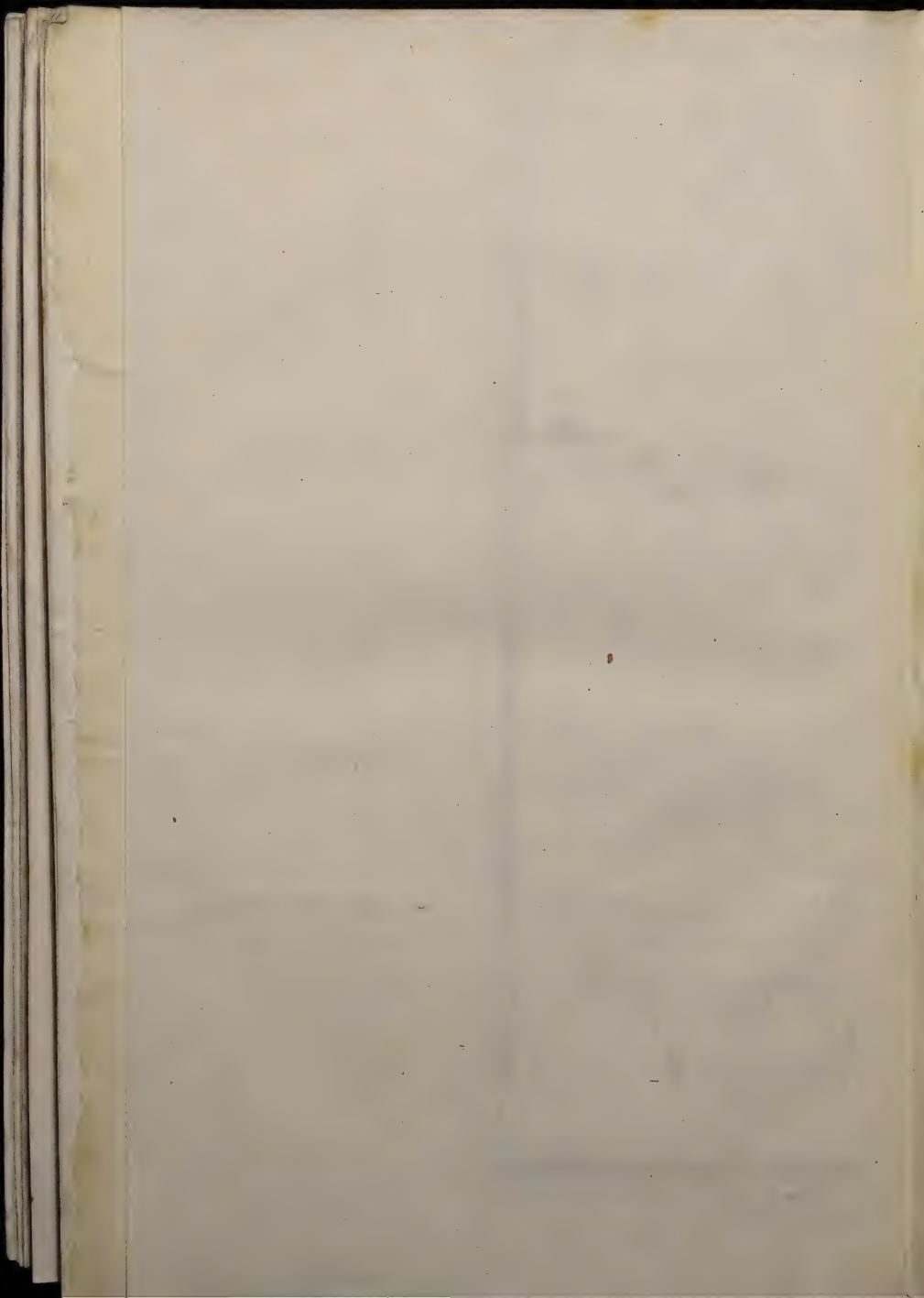
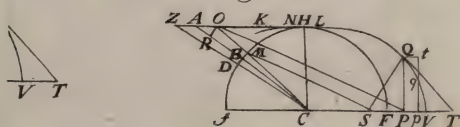
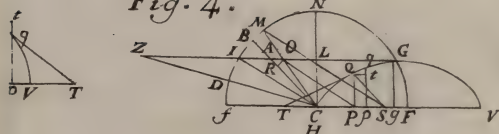
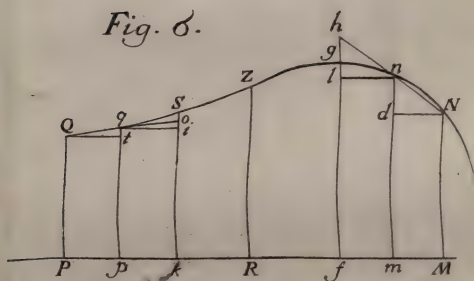
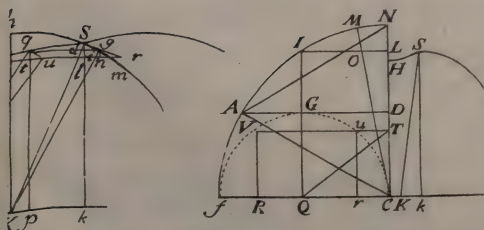
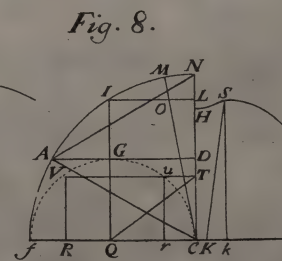
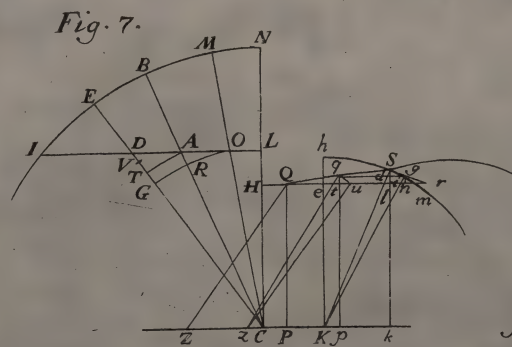
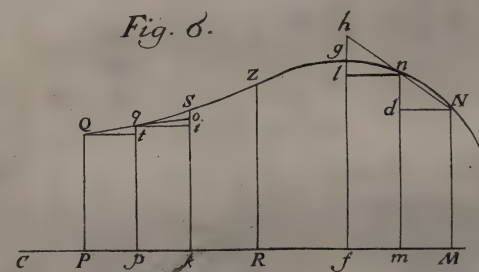
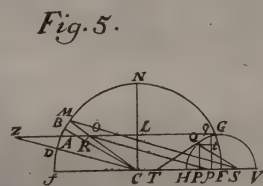
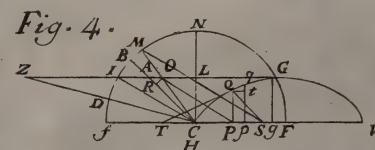
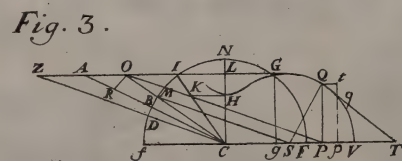
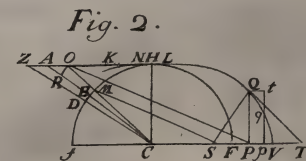
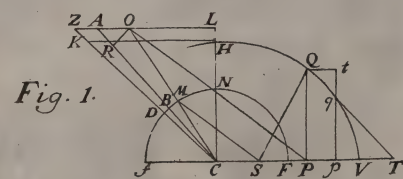
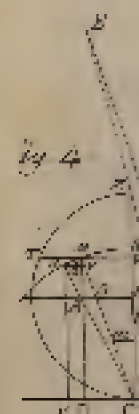
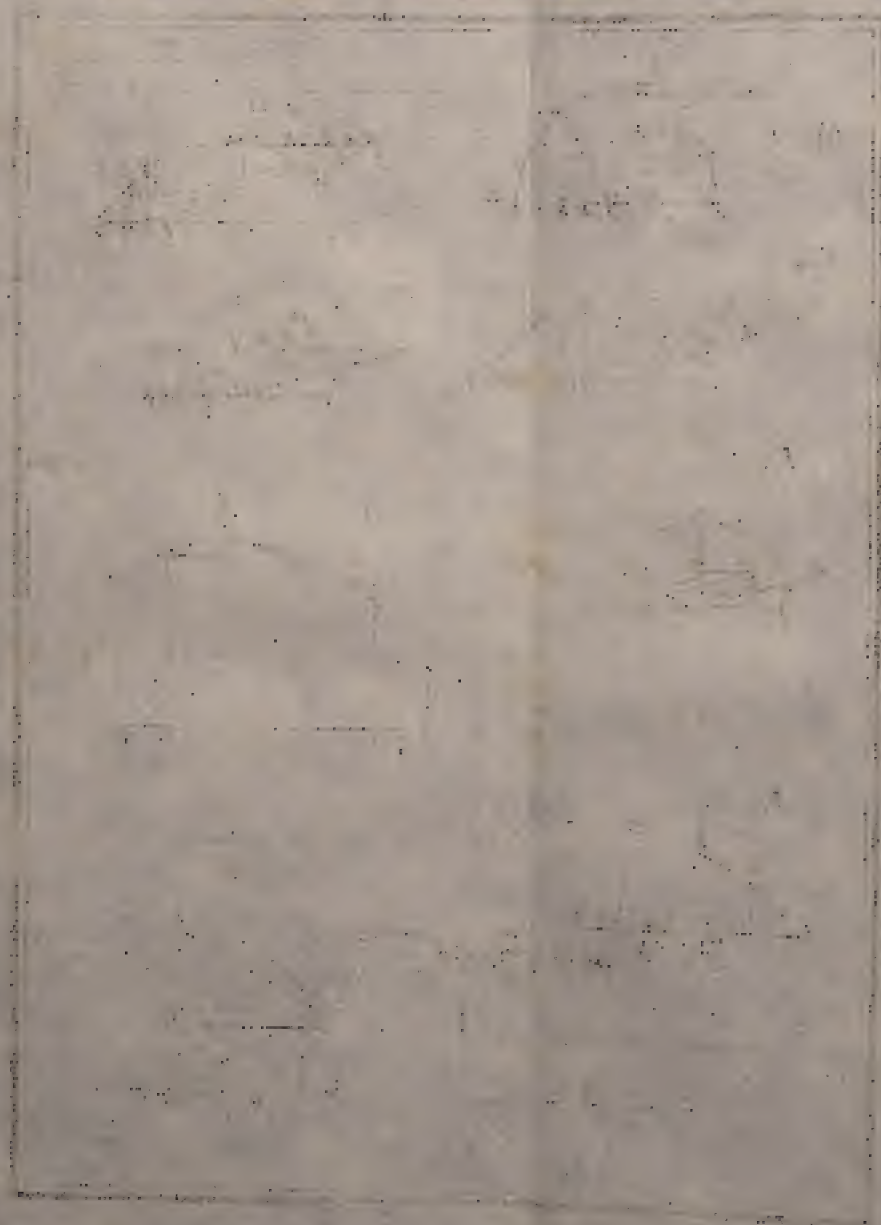
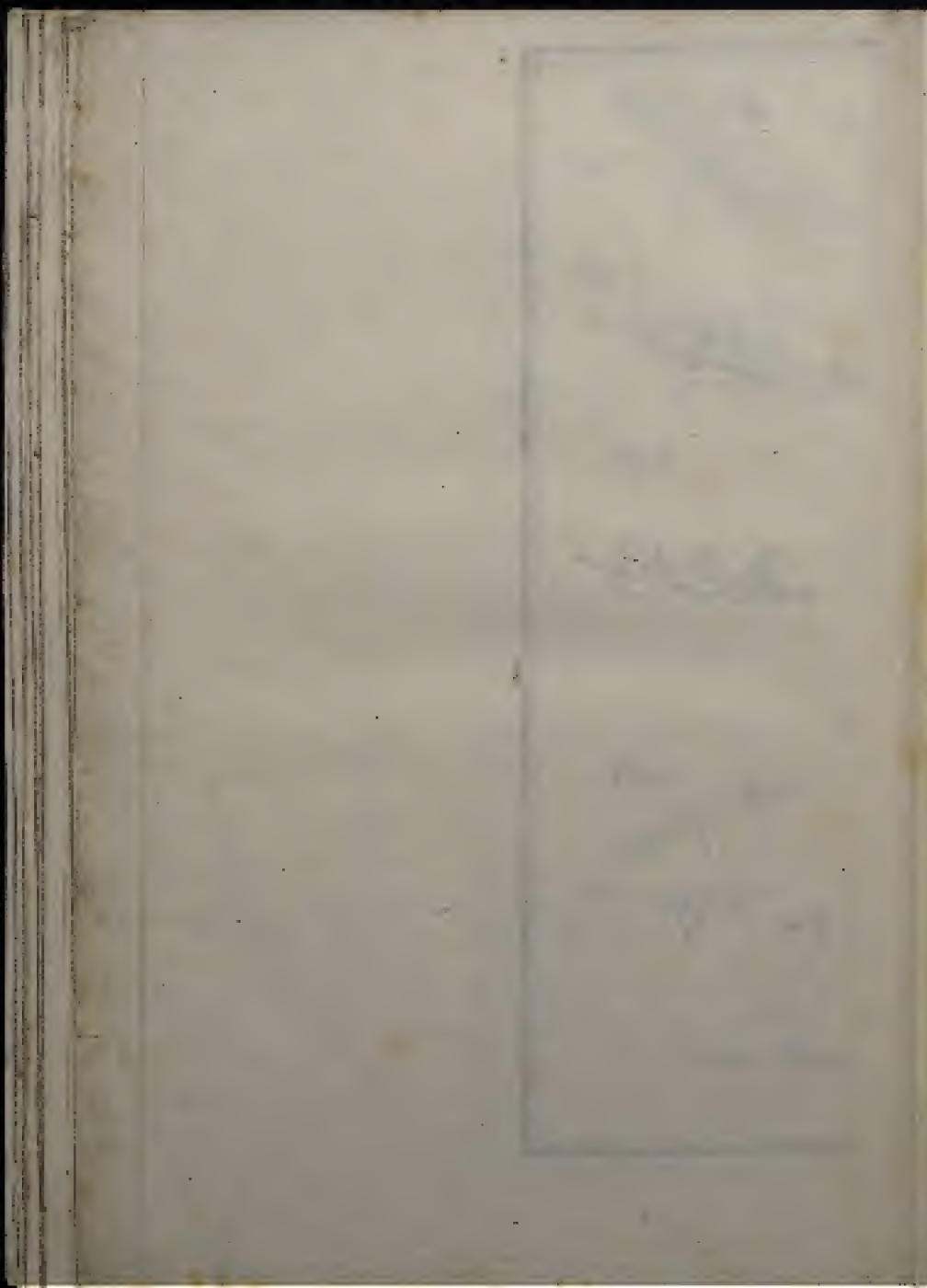
La ragion si deduce dallo scolio 4. della prop. 16. parte 1., ove abbiam dimostrato, che il raggio osculatore corrispondente al primo archetto infinitesimo *Cc* è infinito, e in direzion parallela a *CT*. Il concorso dunque delle due parallele, che segno con *t*, si farà a un' infinita distanza. E perchè il raggio d' osculo *ct* perpendicolare all' arco *Cc* diventa eziandio perpendicolare alla corda *Cc*, che coll' arco si confonde; e di più il tempo di discesa per la corda *Cc*, ossia il tempo per tutto il canale *CQc*, è uguale al tempo della discesa libera per la infinita *Ct*, risulta chiaramente, che questo tempo sarà infinito, e che il grave si muoverà sempre dentro il canale, ma non arriverà mai al punto *C*.

Pag.	lin.	Errori	Correzioni
3	6	*fQ*, *fQ*	*FQ*, *fQ*
14	19	diriggerſi	dirigerſi
33	12	ordinate	coordinate
33	14	*Cp*	*CP*
34	3	*KS*	*kS*
35	1	punto e	punto *e*
38	18	ZO^2	ZQ^2
47	18	per	pei
61	19	$QS-SL=QL-LH=QH$	$QL-SL=QH$
64	11	e l' altra infinitamente piccola	e l' altra composta della steſſa finita, e di una infinitamente piccola
67	3	mecchaniche	meccaniche
68	8	*qb*	*Qb*
68	8	*le*	le
70	20	$igq=Qq$	$gq=Qq$
73	6	*qCT*	*qCt*
73	24	orrizzontale	orizzontale
74	16	*a*	*la*
78	6	*PS*	*CS*

Tav. I.

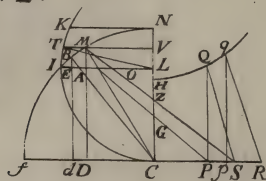
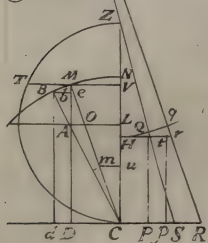
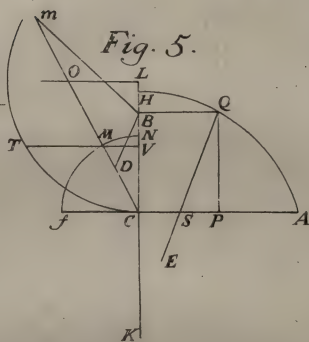
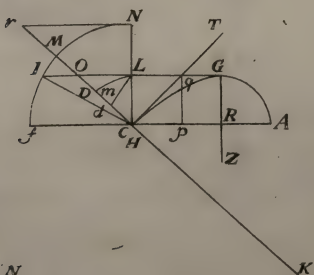
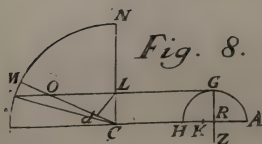
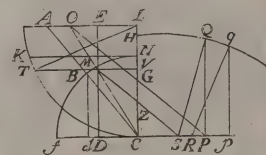
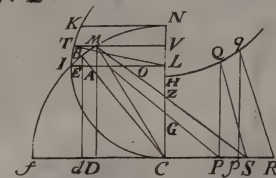
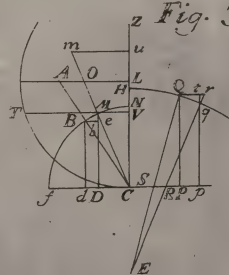
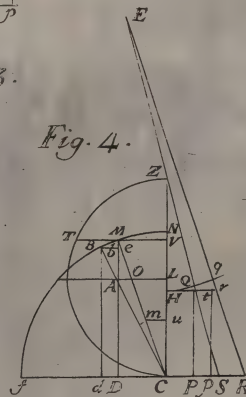
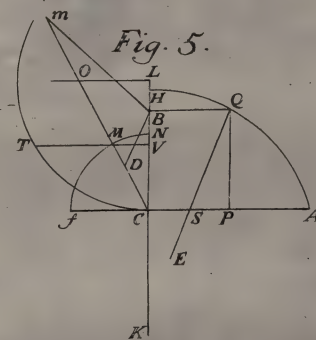
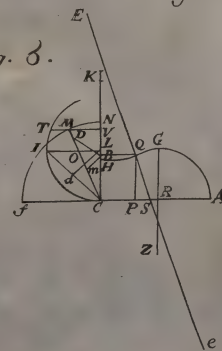
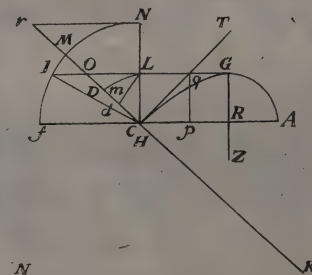
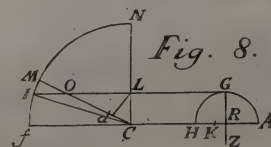
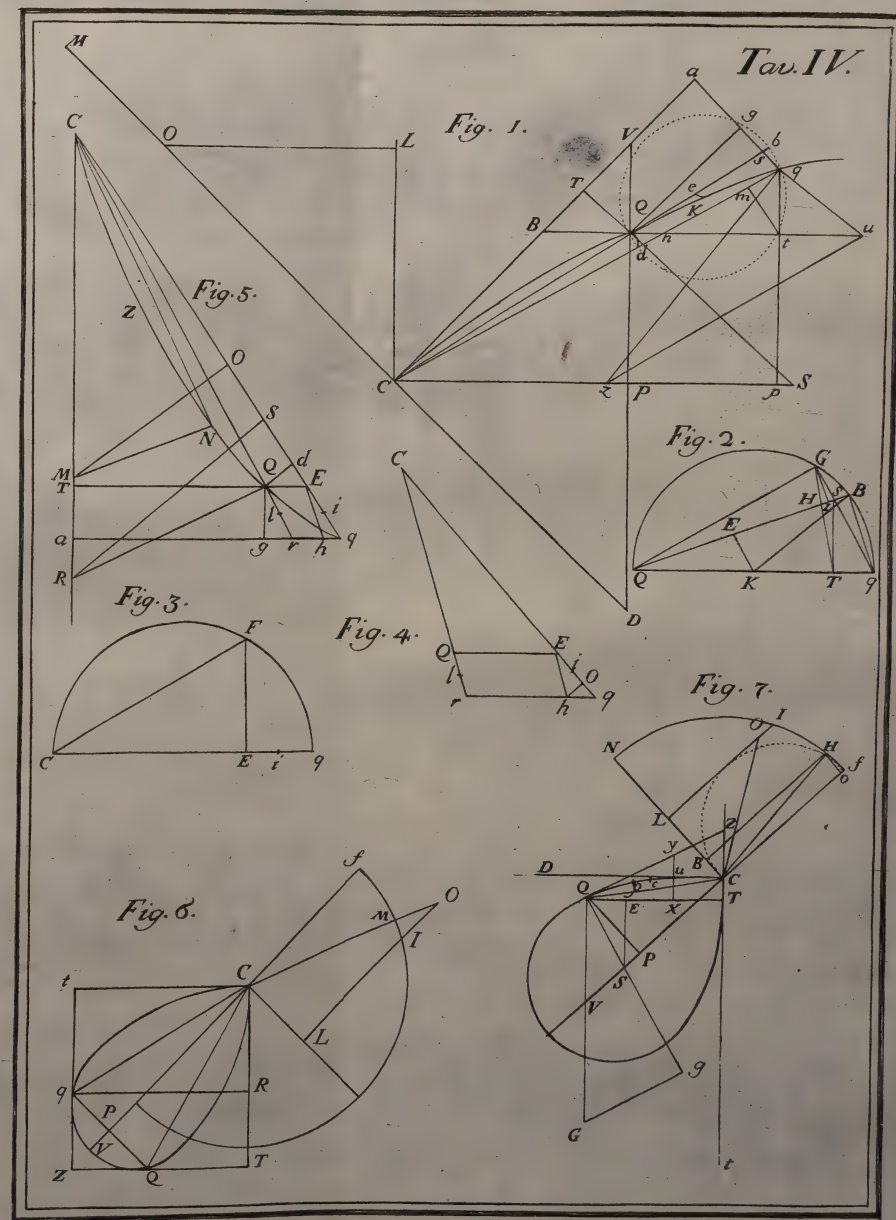
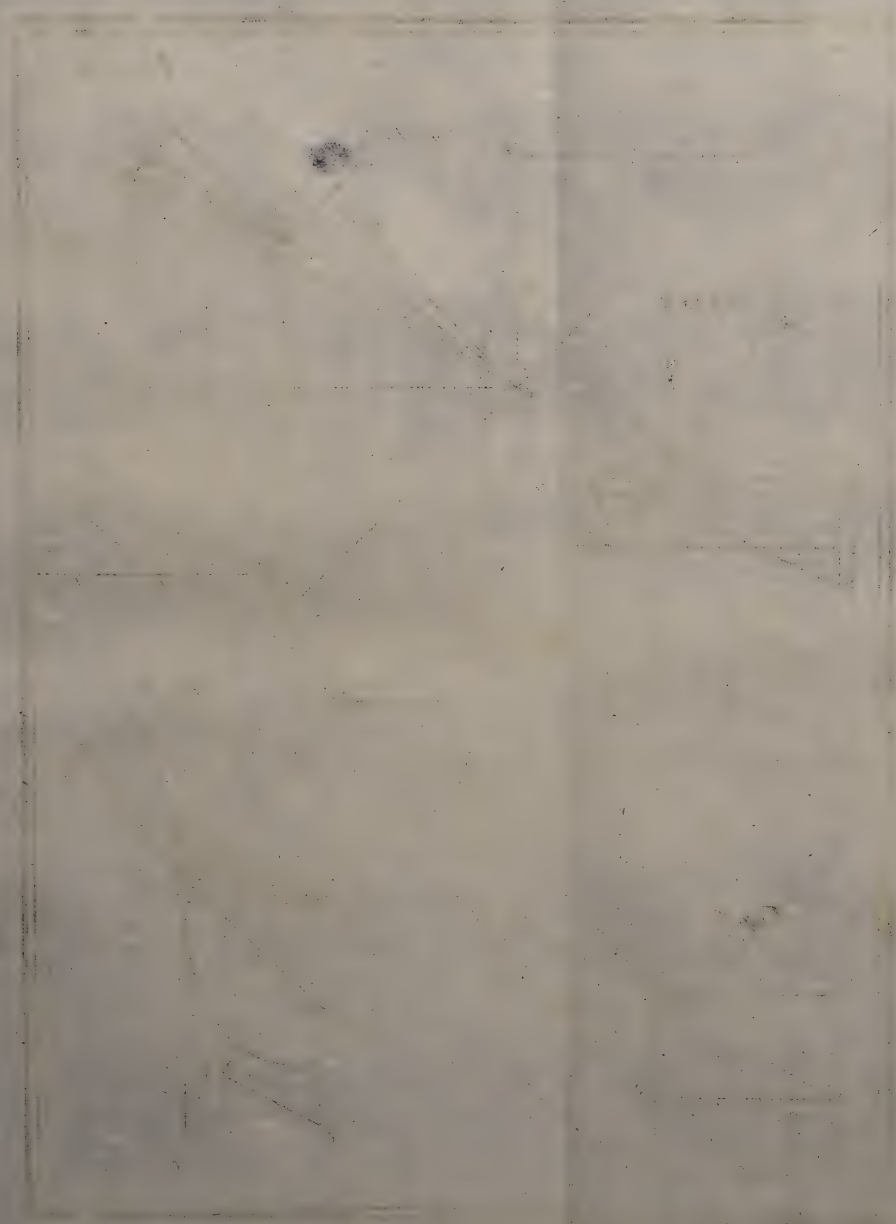
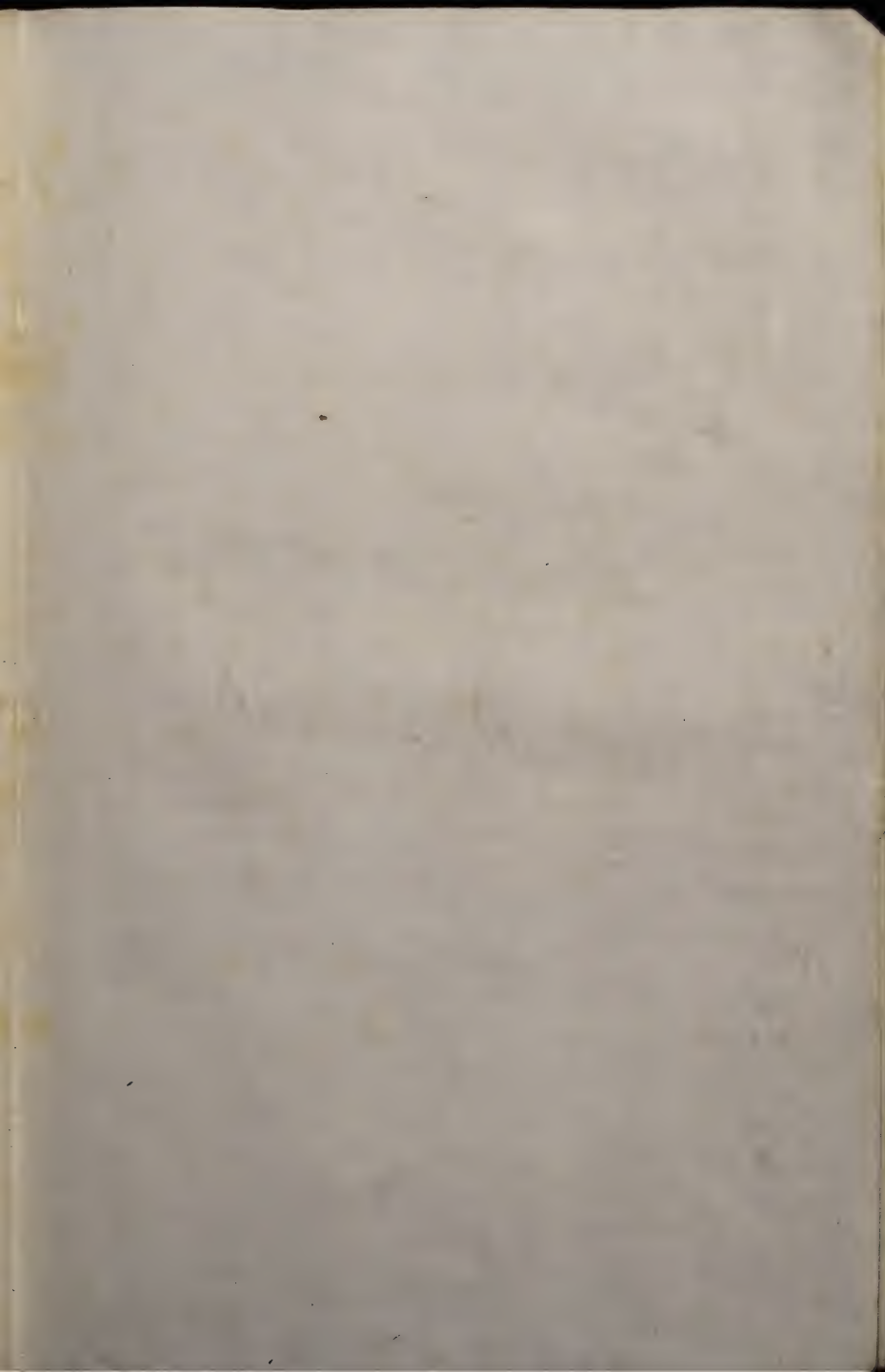
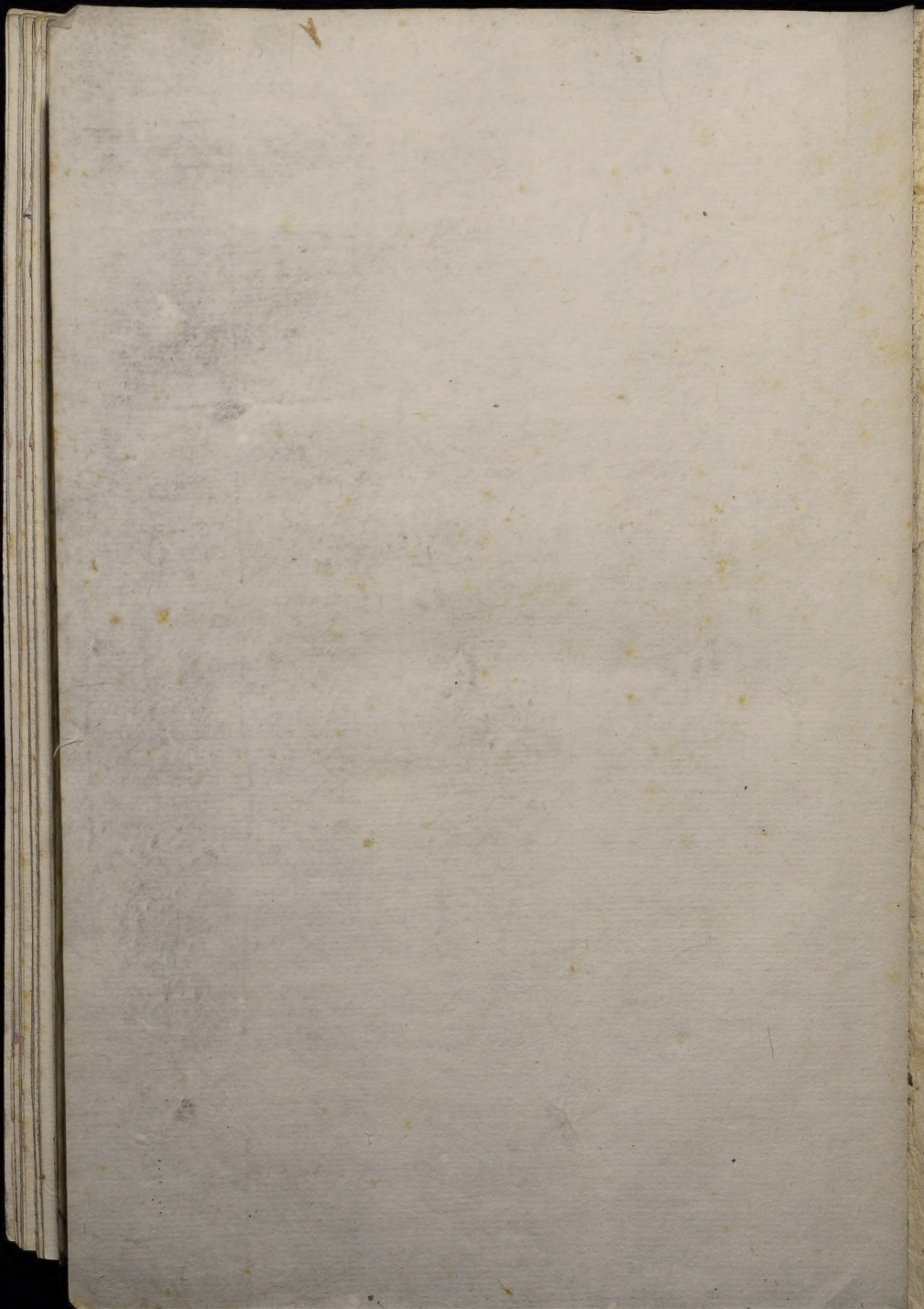
Fig. 2.
M N
I L B
O H Q
u f K p C m P n F V

H
E O LNB
Q
Fig. 4.
M
D
u f C m F P V
M N
E I O L B G
H Q
Fig. 5.
D
u f n C m P g F V

Fig. 7.
N
R B
M
E I S L Q G
O
D
u f n H K C m H P g F V
Fig. 8.
D A O L
Q u t r g i
T R H q
N S
M
B
E
f C Z z K P p k F

Tav. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Tav. II.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 8.

Tav. II.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

Tav. III.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.

Tav. III.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

Tav. IV.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 7.

Tav. IV.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

Della Curva Cassiniana

Trattato

del Prof. Gio. Franc. Malfatti

ec. ecc.

Ricevuto oggi 29. Ottobre
1873.
dal R. Sr. Don Antonio Bonmassari, benef. a Tierno
di Mori